

Программа SingSpect

оценки эволюции параметров мультифрактального спектра сингулярности для группы временных рядов в скользящем временном окне.

А.А. Любушин, доктор физ.-мат. наук
Институт физики Земли РАН им. О.Ю.Шмидта,
123995, Москва, Большая Грузинская, 10; факс: +007-499-2556040;
e-mail: lyubushin@yandex.ru
<http://AlexeyLyubushin.narod.ru/Index.htm>

Программа предназначена для оценки эволюции параметров мультифрактального спектра сингулярности в скользящем временном окне для группы синхронных сигналов.

Описание программы.

Обрабатываемые временные ряды должны представлять собой результаты синхронных наблюдений в виде числовых текстовых файлов, имеющих структуру «одна запись – один отсчет» (или «длинная колонка чисел»). Каждому временному ряду должен соответствовать свой файл. Если исходные данные представляют собой таблицы, то временные метки и прочая служебная информация не должны находиться в первой колонке таблицы. Небольшие пропуски данных должны быть восполнены какими-то «правдоподобными» значениями. Перед запуском программы в рабочей директории должен быть создан вспомогательный файл со стандартным именем "list", содержащий имена анализируемых файлов, перечисленных «в столбик» (см. программу **MakeList**).

Программа считывает из файла "list" имена файлов, содержащих анализируемые временные ряды, открывает их, последовательно считывает из них временные отсчеты и закрывает. Если файл "list" отсутствует, то программа останавливается с соответствующим сообщением. Если исходные файлы содержат разное число отсчетов, то обработка будет производиться по выборке длины, равной минимальной длине временных рядов.

Далее пользователю необходимо ответить на следующие вопросы:

- 1) Надо ли переходить внутри каждого скользящего окна к рядам в приращениях («дифференцировать ряды»). Для данной программы эта операция не является обязательной, даже если ряды имеют сильные низкочастотные составляющие, поскольку метод предусматривает возможность удаления масштабно-зависимых локально-полиномиальных трендов.
- 2) Ввести порядок полинома (от 1 до 10), который будет использован в каждом окне для устранения масштабно-зависимых локально-полиномиальных трендов.
- 3) Ввести длину скользящего временного окна в числе отсчетов.
- 4) Ввести минимальное значение временного масштаба в числе отсчетов, с которого начинается подгонка линейного закона зависимости логарифма интегральной меры вариативности сигнала (6) от логарифма масштаба s . Минимально возможное значение равно 20, а максимально возможное равно 0.1 от длины временного окна. Если введены значения менее или более этих пороговых значений, то минимальной величине масштаба присваивается значение соответствующего порога.
- 5) Ввести взаимное смещение временных окон в числе отсчетов.

- б) Ввести значения T_{ini}, T_{step} - временной метки, соответствующей самому первому отсчету и длине шага по времени, с которым производилась регистрация.

Ниже приведена копия экрана такого диалога:

```

D:\Users\Lbshn\Wrk\SingSpect.exe
This is the program for esimating multi-fractal singularity spectrums for
a set of time series using Detrended Fluctuation Analysis (DFA) within
moving time window. Files with time series to be processed must in the same
directory as the program and their filenames must be listed in a column
in a file with standard filename "list". For each input file the correspondent
output file is generated which has filename "F(Alfa)<Input_Filename>.dat"
Output files have 6 columns: 1-st column: time marks of right-hand end of
moving time window, 2-nd, 3-rd, 4-th, 5-th: AlfaMin, AlfaMax, AlfaMax-AlfaMin,
AlfaSz, where Alfa is singularity index, AlfaSz - index value providing
maximum to singularity spectra F(Alfa).
The 6-th column are the values of F(AlfaSz) within each time window.

Alexey Lyubushin, IPE RAS, Moscow
http://lyubushin.hotbox.ru/Index.htm, e-mail: lyubushin@yandex.ru
-----
Press <Enter> to continue...

Number of signals=          8
Do you want to come to incremental series within each window
before estimating singularity spectrum (0/1) ?
0
What is the polynomial order for scale-dependent trends removing
< 1 <= * <= 10 > ?
8
What is the length of time window (number of samples, * => 32) ?
2880
What is the minimum scale value= ? (cutoff < 20 and > Lrec/10)
20
What is the value of window's shift= ?
1440
What are the values of initial time mark for series and time step:
Tini, Tstep=?
0 0.5_

```

Выводные файлы программы записываются в поддиректорию “F(Alfa)” рабочей директории. Каждому вводному файлу с именем “InpFileName” (имена которых должны быть перечислены в файле “list”) соответствует выводной файл в поддиректории “F(Alfa)”, имеющий имя “F(Alfa)_InpFileName.dat”. Выводные файлы представляют собой числовые таблицы, состоящие из 6-и колонок: 1-я колонка представляет собой временные метки правых концов скользящих временных окон, 2-я колонка – значения нижней границы α_{\min} интервала-носителя спектра сингулярности в текущем временном окне; 3-я колонка – значения верхней границы α_{\max} интервала-носителя спектра сингулярности в текущем временном окне; 4-я колонка – ширина носителя $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$; 5-я колонка – значения обобщенного показателя Херста α^* , то есть аргумента, реализующего максимум спектра сингулярности $F(\alpha)$: $\alpha^* = \arg \max_{\alpha} F(\alpha)$.

Описание метода.

Пусть $X(t)$ – случайный процесс. Определим в качестве меры $\mu_X(t, \delta)$ поведения сигнала $X(t)$ на интервале $[t, t + \delta]$ размах: $\mu_X(t, \delta) = \max_{t \leq s \leq t + \delta} X(s) - \min_{t \leq s \leq t + \delta} X(s)$ и вычислим среднее значение модуля таких мер в степени q :

$$M(\delta, q) = M\{(\mu_X(t, \delta))^q\} \quad (1)$$

Случайный процесс называется масштабно-инвариантным, если $M(\delta, q) \sim |\delta|^{\kappa(q)}$ при $\delta \rightarrow 0$, то есть существует предел:

$$\kappa(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M(\delta, q)}{\ln |\delta|} \quad (2)$$

Если зависимость $\kappa(q)$ является линейной: $\kappa(q) = Hq$, где $H = \text{const}$, $0 < H < 1$, то процесс называется монофрактальным [Taqqu, 1988].

Для вычисления функции $\kappa(q)$ по конечной выборке из временного ряда $X(t)$, $t = 1, \dots, N$ можно применить метод DFA [Kantelhardt et al., 2002]. Пусть s - число отсчетов, ассоциированное с варьируемым масштабом δ_s : $\delta_s = s \cdot \Delta t$. Разобьем выборку на непересекающиеся малые интервалы длиной s отсчетов:

$$I_k^{(s)} = \{t : 1 + (k-1) \cdot s \leq t \leq k \cdot s, \quad k = 1, \dots, [N/s]\} \quad (3)$$

и пусть

$$y_k^{(s)}(t) = X((k-1)s + t), \quad t = 1, \dots, s \quad (4)$$

участок временного ряда $X(t)$, соответствующий интервалу $I_k^{(s)}$. Пусть $p_k^{(s,m)}(t)$ - полином порядка m , подогнанный методом наименьших квадратов к сигналу $y_k^{(s)}(t)$. Рассмотрим отклонения от локального тренда:

$$\Delta y_k^{(s,m)}(t) = y_k^{(s)}(t) - p_k^{(s,m)}(t), \quad t = 1, \dots, s \quad (5)$$

и вычислим значение:

$$Z^{(m)}(q, s) = \left(\sum_{k=1}^{[N/s]} (\max_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t) - \min_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t))^q \right)^{1/q} \quad (6)$$

которое будем рассматривать как оценку для $(M(\delta_s, q))^{1/q}$. Определим теперь функцию $h(q)$ как коэффициент линейной регрессии между значениями $\ln(Z^{(m)}(q, s))$ и $\ln(s)$: $Z^{(m)}(q, s) \sim s^{h(q)}$. Очевидно, что $\kappa(q) = qh(q)$, а для монофрактального процесса $h(q) = H = \text{const}$.

Следующим шагом в мультифрактальном анализе [Feder, 1988] после определения функции $\kappa(q)$ является вычисление спектра сингулярности $F(\alpha)$, который можно определить как фрактальную размерность моментов времени τ_α , имеющих одно и то же значение локального показателя Гельдера-Липшица: $\lambda(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu(t, \delta))}{\ln(\delta)}$, то есть $\lambda(\tau_\alpha) = \alpha$,

Стандартный подход состоит в вычислении статистической суммы Гиббса:

$$W(q, s) = \sum_{k=1}^{[N/s]} (\max_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t) - \min_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t))^q \quad (7)$$

и определения показателя массы $\tau(q)$ из условия $W(q, s) \sim s^{\tau(q)}$, после чего спектр $F(\alpha)$ вычисляется согласно формуле:

$$F(\alpha) = \max \left\{ \min_q (\alpha q - \tau(q)), 0 \right\} \quad (8)$$

Сравнивая (6) и (7), нетрудно заметить, что $\tau(q) = \kappa(q) - 1 = qh(q) - 1$. Таким образом, $F(\alpha) = \max \left\{ \min_q (q(\alpha - h(q)) + 1, 0 \right\}$.

Если оценивать спектр сингулярности $F(\alpha)$ в скользящем временном окне, то его эволюция дает информацию об изменении структуры шума. В частности, положение и ширина носителя спектра $F(\alpha)$, то есть значения $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$, $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ и α^* – то значение, которое доставляет функции $F(\alpha)$ максимум: $F(\alpha^*) = \max_{\alpha} F(\alpha)$, являются характеристиками шума. Величину α^* называется обобщенным показателем Херста. Для монофрактального сигнала значение $\Delta\alpha$ должно быть равно нулю, а $\alpha^* = H$. Обычно $F(\alpha^*) = 1$, но встречаются окна, для которых $F(\alpha^*) < 1$. В общем случае величина $F(\alpha^*)$ равна фрактальной размерности носителя мультифрактальной меры [Feder, 1988].

При вычислении величин $\Delta\alpha$ и α^* использовались следующие соображения. Показатель степени q варьировался внутри интервала: $q \in [-Q, +Q]$, где Q – некоторое достаточно большое число, например $Q = 10$. Для каждого значения α внутри интервала $\alpha \in [A_{\min}, A_{\max}]$, где $A_{\min} = \min_{q \in [-Q, +Q]} \frac{d\tau(q)}{dq}$, $A_{\max} = \max_{q \in [-Q, +Q]} \frac{d\tau(q)}{dq}$, вычислялось значение $\tilde{F}(\alpha) = \min_{q \in [-Q, +Q]} (\alpha q - \tau(q))$. Если значение α близко к A_{\min} , то $\tilde{F}(\alpha) < 0$ и эта величина не годится в качестве оценки спектра сингулярности, который должен быть неотрицательным. Но, начиная с некоторого α величина $\tilde{F}(\alpha)$ становится неотрицательной – это условие выделяет значение α_{\min} . При дальнейшем увеличении α значение $\tilde{F}(\alpha)$ увеличивается, достигает максимума при $\alpha = \alpha^*$, а затем начинает уменьшаться и, наконец, достигает некоторого значения $\alpha_{\max} < A_{\max}$, такого, что при $\alpha > \alpha_{\max}$ оно опять становится отрицательным: $\tilde{F}(\alpha) < 0$. Таким образом, $F(\alpha) = \tilde{F}(\alpha)$ при условии, что $\tilde{F}(\alpha) \geq 0$, которое определяет интервал носителя спектра сингулярности $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Производная $\frac{d\tau(q)}{dq}$ находится численно по значениям $\tau(q)$, $q \in [-Q, +Q]$ и при ее вычислении точность не имеет особого значения, так как она используется лишь для грубого определения априорного интервала возможных показателей степени q .

Рис.1 иллюстрирует последовательные этапы вычисления спектра сингулярности для временного ряда электротеллурических потенциалов на Камчатке, данные взяты из материала статьи [Любушин, Копылова, 2004]. На рис. 1(в) представлены графики как самих величин $\lg(Z^{(m)}(q, s))$, так и линейных трендов, подогнанных к ним для 10 различных значений степени q для того же временного окна. Наклон графиков линейных трендов есть ничто иное, как функция $h(q)$, по значениям которой вычисляется показатель массы $\tau(q) = qh(q) - 1$, а далее, согласно формуле (8), и сам спектр сингулярности.

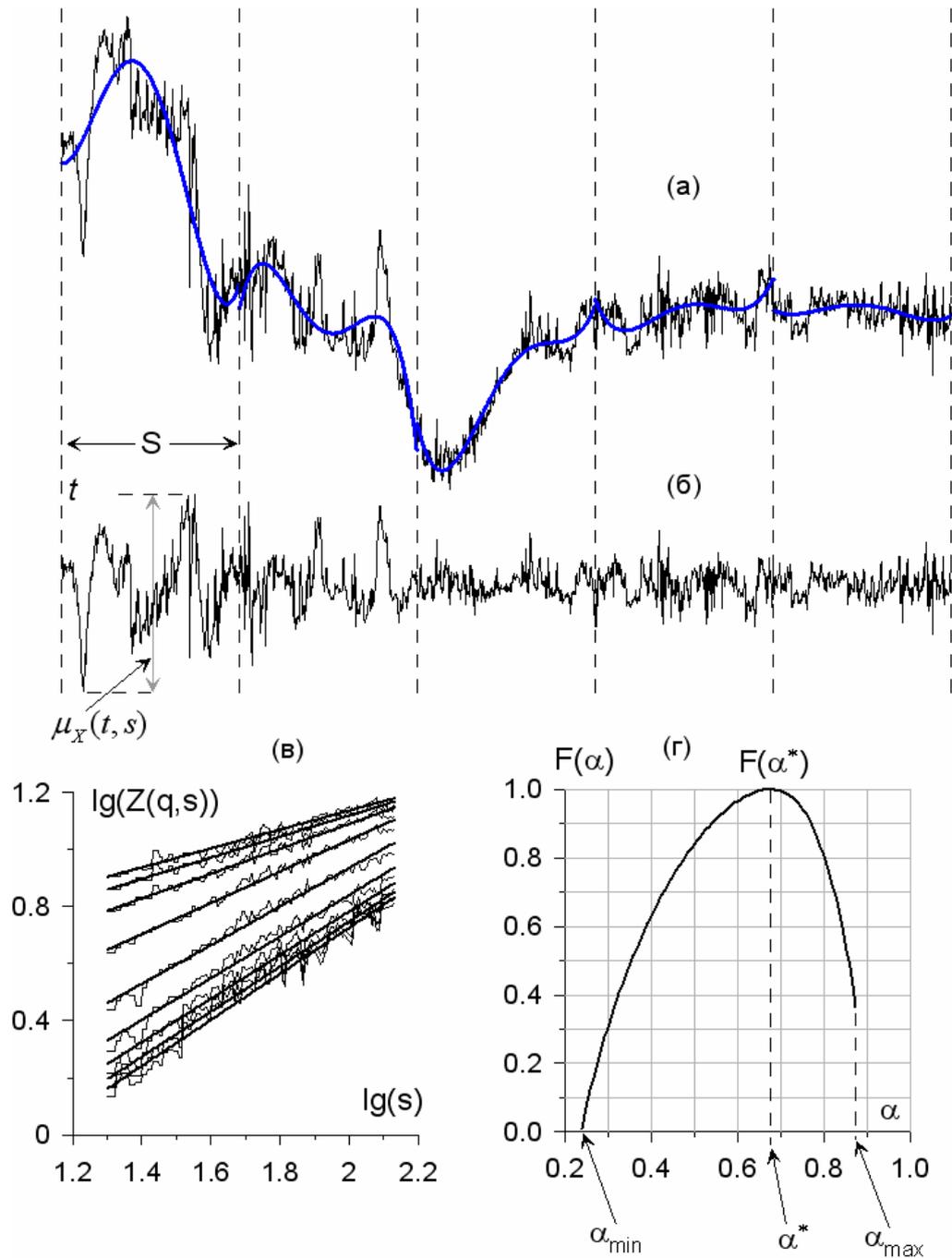


Рис.1. (а), тонкая линия – пример временного ряда (электротеллурические потенциалы); толстые линии – полиномиальные тренды 4-го порядка, подогнанные внутри непересекающихся интервалов длиной s отсчетов; (б) – разница внутри интервалов между исходными данными и трендами; (в) – графики зависимостей $\lg(Z(q, s))$ от $\lg(s)$ с подогнанными линейными трендами для последовательных значений степени q (сверху вниз): 10, 7.5, 5, 2.5, -0.05, -2.5, -5, -7.5 и -10; (г) – спектр сингулярности.

Пример применения.

Анализ фрактальных и мультифрактальных свойств временных рядов мониторинга является одним из перспективных направлений анализа данных в физике твердой Земли, метеорологии, гидрологии [Currenti et al., 2005; Ramírez-Rojas et al., 2005; Telesca et al., 2005; Любушин, Соболев, 2006; Любушин, 2007, 2008]. Это обусловлено способностью

фрактального анализа исследовать сигналы, которые с точки зрения ковариационной и спектральной теории являются не более чем белым шумом, либо броуновским движением.

Следующий пример применения взят из работы [Любушин, Соболев, 2006]. Рассматриваются непрерывные синхронные записи микросейсмического фона на 6 широкополосных станциях IRIS, расположенных в обширном регионе, простирающимся от центра Европейской части России (Обнинск) до Дальнего Востока (Камчатка, Сахалин), в течение месяца перед Кроноцким землетрясением на Камчатке ($M=7.8$, 05.12.1997). Путем усреднения и прореживания исходных записей осуществлялся переход к интервалу дискретизации 30 сек. и исследовался микросейсмический фон в диапазоне периодов от 1 минуты до 2.4 часа после удаления масштабно-зависимых трендов, обусловленных влиянием приливов и температурных колебаний. Флуктуации микросейсм анализировались с помощью оценок эволюции их мультифрактальных спектров сингулярности (п.1.8) в скользящем временном окне длиной 12 часов. В качестве признака, характеризующего свойства фона в текущем временном окне, брались значения α^* - обобщенного показателя Херста, реализующего максимум спектра сингулярности. Таким образом, осуществлялся переход от анализа исходных высокочастотных сейсмических записей к совместному анализу низкочастотных временных рядов α^* -вариаций на нескольких станциях. Путем оценки эволюции спектральной меры когерентного поведения α^* -вариаций в скользящем временном окне длиной 5 суток для различных комбинаций совместно анализируемых станций выделены скрытые эффекты

Рассматриваются любезно предоставленные Геофизической службой РАН сейсмические записи вертикальной компоненты с частотой дискретизации 20 Гц на 6 широкополосных станциях IRIS в Петропавловске-Камчатском (**Pet**), Южно-Сахалинске (**Yss**), Магадане (**Mag**), Якутске (**Yak**), Арти (**Art**) на Урале и Обнинске (**Obn**) в течение месяца, от 05.11.1997 до 05.12.1997 строго перед Кроноцким землетрясением на Камчатке ($M=7.8$, 05.12.1997). В скобках указаны 3-буквенные идентификаторы сейсмических станций, на которые всюду далее будут делаться ссылки. Для перехода в минутный диапазон периодов исходные записи усреднялись и прореживались в 600 раз, в результате чего получались временные ряды с интервалом дискретизации 30 сек. Эти записи содержали выбросы большой амплитуды, обусловленные вступлениями либо от удаленных сильных землетрясений, либо местных событий, в том числе и промышленных взрывов. Для устранения побочных эффектов, обусловленных такими выбросами, после перехода к 30-секундным отсчетам данные подвергались итеративной процедуре винзоризации.

На рис.2 изображены графики данных после усреднения, прореживания и винзоризации. Отчетливо видны приливные колебания и прочие низкочастотные тренды, предположительно связанные с вариациями температуры и атмосферного давления. Заметим, что запись **Yak** содержит пропуск данных для временных меток 20160-21598 минут, который заметен на рис.2 как плато постоянных значений. Кроме того, на записи **Art** присутствует низкочастотная аномалия (возможно калибровочный импульс) для временных меток 32200-32960 минут, после которой запись претерпевает значительные скачки вверх и вниз с последующим плавным восстановлением среднего уровня. Эти 2 дефекта данных надо иметь в виду при интерпретации результатов анализа.

Заметим, что участок данных на записи **Art** с сильным возрастающим трендом после низкочастотного импульса является вполне кондиционным для анализа, так как используемый метод оценки спектра сингулярности как раз предназначен для исключения влияния трендов. Для того, чтобы используемый метод оценки спектра сингулярности в скользящем временном окне мог пройти непрерывно по всей длительности записей **Yak** и **Art** через сбойные участки с постоянными значениями без остановки из-за численной

неустойчивости, плато постоянных значений были возмущены малым гауссовским белым шумом с дисперсией 10^{-3} .

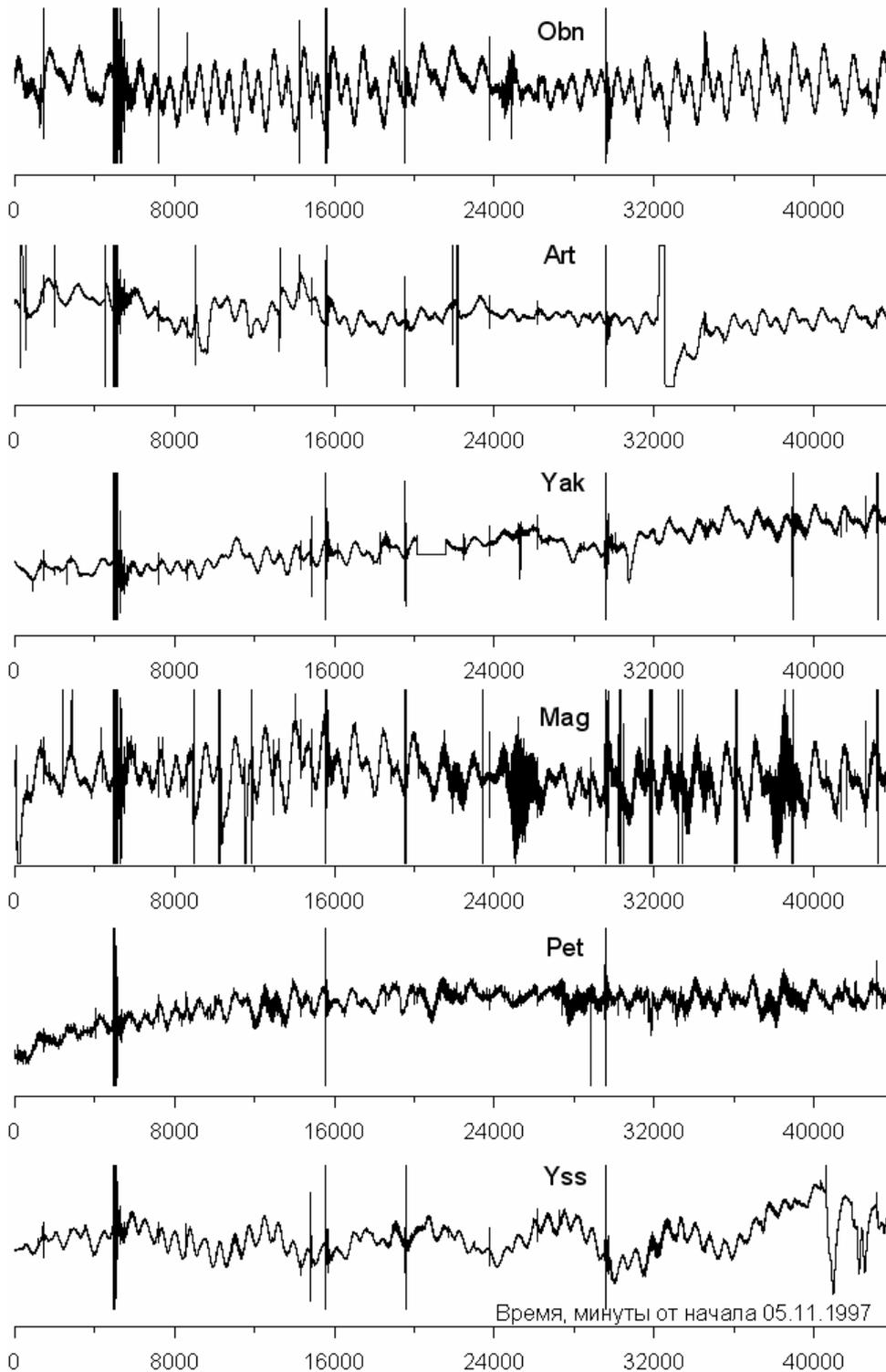


Рис.2. Графики исходных данных микросейсмических колебаний для 6 станций с 05.11.1997 по 05.12.1997 строго перед Кроноцким землетрясением на Камчатке ($M = 7.8$, 05.12.1997) (краткие обозначения станций приведены на графиках) после перехода к 30-секундным интервалам дискретизации и операции винзоризации, т.е. итеративной срезки больших выбросов в данных, обусловленных вступлениями от землетрясений.

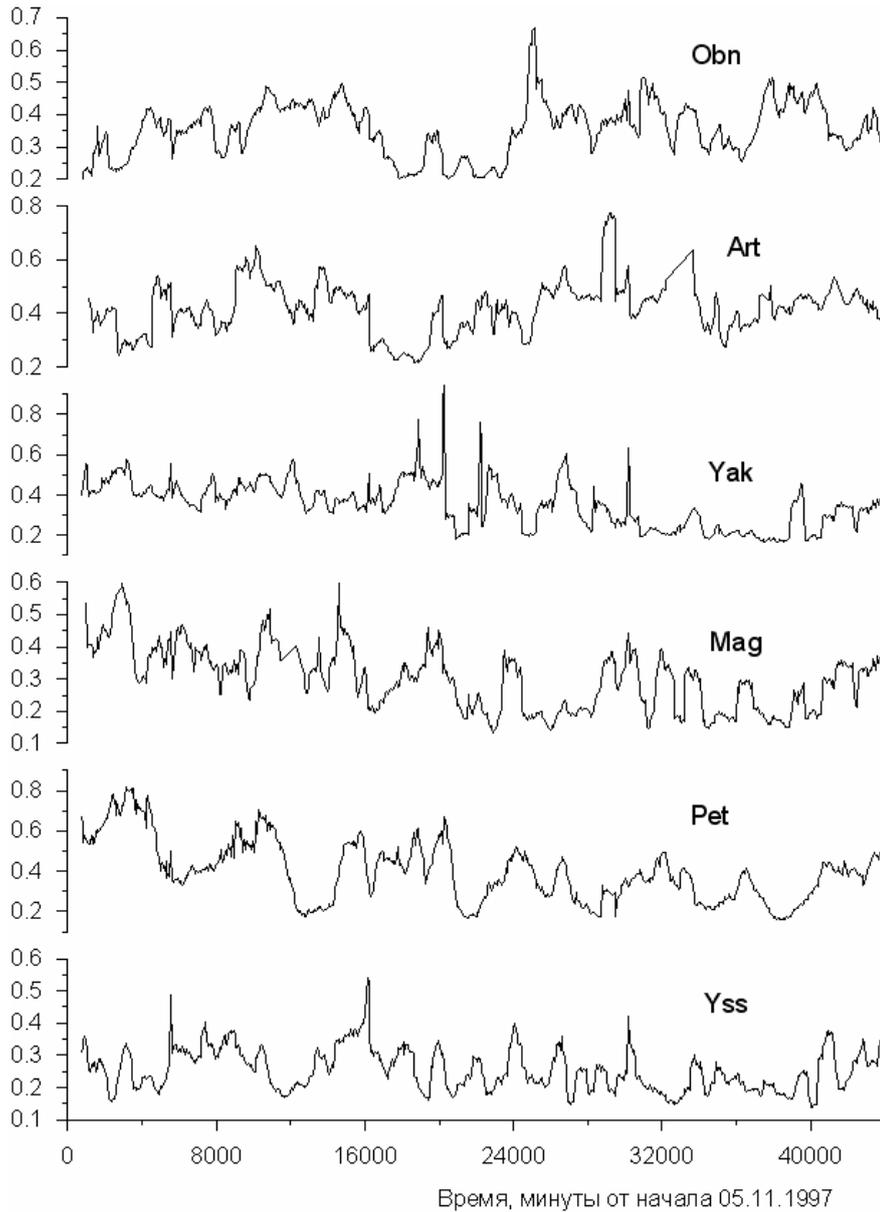


Рис.3. Графики значений α^* - обобщенного показателя Херста, реализующего максимум спектра сингулярности записей микросейсмического фона на всех станциях (рис.2) при оценке в скользящем временном окне длиной 12 часов, взятых со смещением 1 час. По временной оси отложена координата правого конца скользящего временного окна.

Целью анализа является обнаружение эффектов когерентного (синхронного) поведения микросейсмических колебаний в минутном диапазоне периодов после перехода от исходных данных к их спектрам сингулярности, оцененным в скользящем временном окне. Ниже в качестве такой характеристики спектров сингулярности были выбраны значения α^* аргумента, на котором спектр достигает своего максимума. Значения α^* характеризуют наиболее типичную сингулярность, которая встречается чаще всего в пределах текущего окна, при условии самоподобного поведения шумовой составляющей микросейсм.

Для получения временных рядов эволюции значений α^* было выбрано скользящее окно длиной 1440 30-секундных отсчетов, то есть 12 часов, взаимное смещение соседних окон

равнялось 120 отсчетам или 1 часу. Для устранения масштабно-зависимых трендов брались полиномы 4-го порядка. Функция $h(q)$ в зависимости $Z^{(m)}(q, s) \sim s^{h(q)}$ в формуле (6) оценивалась в каждом окне для масштабов s , изменяющихся от минимального значения 20 отсчетов до максимального, равного одной пятой длины окна. При длине 1440 отсчетов, таким образом, максимальный масштаб равен 288 30-секундных отсчетов или 144 минуты = 2.4 часа. На рис.3 представлены графики эволюции значений α^* для всех 6 станций в зависимости от правого конца скользящего временного окна.

Дальнейший план анализа состоит в выделении когерентных вариаций значений α^* . Даже невооруженным глазом заметна сильная коррелированность α^* -вариаций для станций Yak и Mag начиная с временной метки 38000 минут. Для выделения более скрытых когерентных элементов поведения, которые могут иметь фазовый сдвиг и наблюдаться сразу для нескольких станций, был применен метод, использующий оценку канонических когерентностей в скользящем временном окне – см. описание программы **SpectCohMes**.

Серия диаграмм на рис.4(a1)-(a4) предназначена для выделения всплеска когерентности путем оценок для различных комбинаций из 3-х станций. Отметим, что на рис.4(a1)-(a4) допустимо сравнение максимальных значений меры когерентности, поскольку число одновременно анализируемых временных рядов одно и то же. Наибольший всплеск когерентности (0.65), наблюдается для станций Mag, Pet, Yak, расстояние от эпицентра Кроноцкого землетрясения для которых составляет 900, 350 и 2050 км; наименьший (0.32) – для станций Obn, Art, Yak, наиболее удаленных от очага землетрясения, на 6800, 5900 и 2050 км. Во всех вариантах на рис.4(a1)-(a4) мера когерентности претерпевает всплеск в окрестности метки 40000 минут, которая соответствует интервалу наблюдений 29.11-03.12.1997, то есть за 3-7 суток до толчка.

Рис.4(б1)-(б4) представляет образ развития «пятна когерентности» на плоскости время-частота перед Кроноцким землетрясением по мере включения все большего числа станций в совместную обработку (сверху вниз): он начинается с 3-х Pet, Yak, Mag, наиболее близко расположенных к очагу (4(б1)) и завершается всеми 6 станциями на рис.4(б4). Основной всплеск когерентности на рис.4(б1) сосредоточен в окрестности временных меток 40000-42000 минут и находится в самой низкочастотной части спектра, для периодов от 500 до 6000 минут. С учетом того, что метки на диаграммах соответствуют правому концу временного окна длиной 7200 минут (5 суток), этот всплеск соответствует интервалам времени 32800-42000 на рис.1 и 2 или 28.11-03.12.1997.

Интересно отметить, что по мере приближения скользящего временного окна к моменту землетрясения уровень когерентности α^* -вариаций падает, хотя и остается выше фоновых статистических флуктуаций. Остальные диаграммы на рис.4(б1)-(б4) дают увеличение временной длительности низкочастотного «пятна когерентности» по мере увеличения числа станций. Заметим, что на рис.4(б4), где в обработку включена станция Art, наиболее длительный всплеск когерентности прерывается для временных меток 33000-34000 минут, что объясняется наличием низкочастотного калибровочного импульса на записи Art для меток 32000-32960, о котором уже говорилось выше.

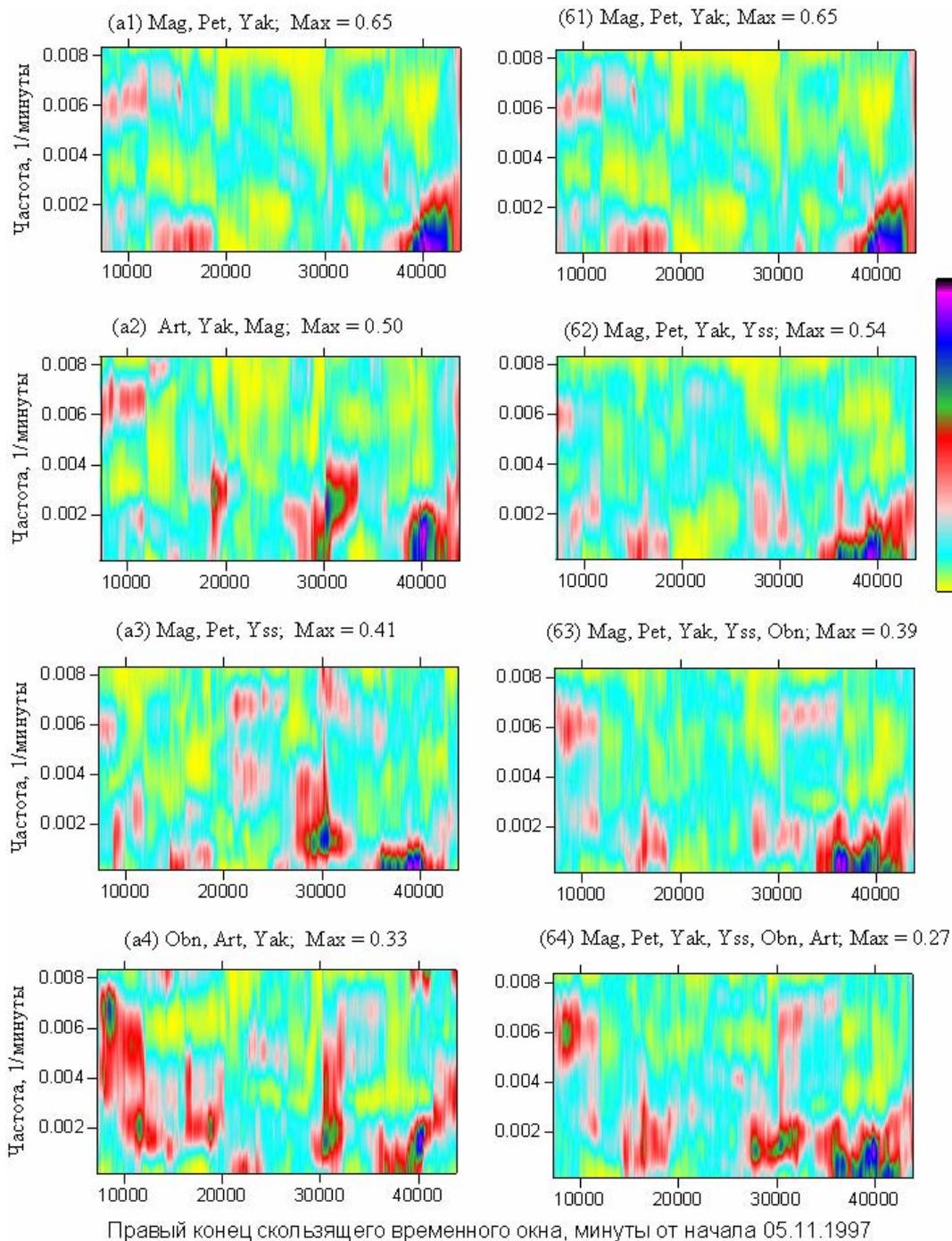


Рис.4. (a1)-(a4) – частотно-временные диаграммы эволюции спектральной меры когерентности временных рядов α^* -вариаций при оценке в скользящем временном окне длиной 109 значений (5 суток), AR-порядок = 3; для различных комбинаций 3-х одновременно анализируемых станций. (б1)-(б4) – частотно-временные диаграммы эволюции спектральной меры когерентности временных рядов α^* -вариаций для последовательно увеличиваемого числа одновременно анализируемых станций. На каждой диаграмме рядом с идентификаторами анализируемых станций проставлены максимальные значения меры когерентности.

Заметим кроме того, что интенсивный синхронный всплеск шума для временных меток 4920-6000 минут на рис.2, обусловленный вступлением от удаленного мощного землетрясения 08.11.1997, 10:02 GTM, M=7.9, широта = 35.08 град. США, долгота = 87.32 град. ВД, дал увеличение меры когерентности α^* -вариаций лишь на рис.4(a4) и 4(б4),

причем для «высоких частот» с периодом около 160 минут. На рис.2 можно заметить еще несколько подобных же синхронных всплесков, которые также дали несущественное увеличение меры $\kappa(\tau, \omega)$. Конец интервала наблюдений, непосредственно примыкающий к вступлению от Кроноцкого землетрясения содержит весьма незначительные синхронные вариации на рис.4, которые включают в себя также 2 форшока. Отметим, что 03.12.1997 началась мощная серия форшоковой активизации перед Кроноцким землетрясением.

Корреляция записей низкочастотных микросейсм на станциях, удаленных друг от друга на тысячи километров, а по долготе на десятки градусов, говорит об общем источнике регионального характера. С учетом наибольшей корреляции для станций, расположенных в северо-восточной части Дальнего востока и Сибири, он предположительно располагался в этом районе. Вопрос об его природе остается открытым. Таким образом, в результате анализа эволюции спектральной меры когерентности вариаций значений обобщенного показателя Херста, реализующего максимум мультифрактальных спектров сингулярности поля микросейсмических колебаний, выделен эффект синхронизации микросейсмических шумов на севере Евразии за 3-7 суток до мощного Кроноцкого землетрясения на Камчатке 05.12.1997.

ЛИТЕРАТУРА.

- Любушин А.А., Копылова Г.Н.* (2004) Многомерный вейвлет-анализ временных рядов электротеллурических наблюдений на Камчатке - *Физика Земли*, 2004, N2, с.82-96.
- Любушин А.А., Соболев Г.А.* (2006) Мультифрактальные меры синхронизации микросейсмических колебаний в минутном диапазоне периодов – *Физика Земли*, 2006, N9, с.18-28.
- Любушин А.А.* (2007) «Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга». М.: Наука, 2007, 228с.
- Любушин А.А.* (2008) Микросейсмический шум в минутном диапазоне периодов: свойства и возможные прогностические признаки. - *Физика Земли*, 2008, № 4, с.17-34.
- Currenti G., C. del Negro, V. Lapenna, and L. Telesca* (2005) Multifractality in local geomagnetic field at Etna volcano, Sicily (southern Italy) – *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 5, 555–559, 2005
- Feder J.* (1988) *Fractals*. Plenum Press, New York, London (Русский перевод: *Федер Е.* (1991) *Фракталы*. М., Мир. 254с.)
- Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Konscienny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., and Stanley H. E.* (2002) Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series, *Physica A*, 316, 87–114, 2002.
- Kantelhardt, J. W., Rybski, D., Zschiegner, S.A., Braun, P., Koscielny-Bunde, E., Livina, V., Havlin, S., Bunde, A.,* 2003. Multifractality of river runoff and precipitation: Comparison of fluctuation analysis and wavelet methods. *Physica A*, 330, 240-245.
- Ramírez-Rojas A., A. Muñoz-Diosdado, C. G. Pavía-Miller, and F. Angulo-Brown* (2004) Spectral and multifractal study of electroseismic time series associated to the $M_w=6.5$ earthquake of 24 October 1993 in Mexico - *Natural Hazards and Earth System Sciences* (2004) 4: 703–709.
- Taqqu M.S.* (1988) Self-similar processes. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol.8, pp.352-357, Wiley, New York, 1988.
- Telesca L., G. Colangelo, and V. Lapenna* (2005) Multifractal variability in geoelectrical signals and correlations with seismicity: a study case in southern Italy - *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 5, 673–677, 2005