

**ПРОГРАММЫ ВЫДЕЛЕНИЯ СКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ В ПОТОКЕ СОБЫТИЙ
И РАЗВЕДОЧНОГО АНАЛИЗА СВОЙСТВ СКАЛЯРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

А.А. Любушин, доктор физ.-мат. наук
Институт физики Земли РАН им. О.Ю.Шмидта,
123995, Москва, Большая Грузинская, 10; факс: +007-495-2556040;
e-mail: lyubushin@yandex.ru
<http://AlexeyLyubushin.narod.ru/Index.htm>

Ниже приводятся инструкции для пользователя двух программ по анализу данных. Инструкции сопровождаются примерами анализа данных. Описание используемых алгоритмов и методов представлено в Приложении, содержащем 7 пунктов: **П1-П7**, на которые будут делаться ссылки в инструкциях для пользователя. Программы работают в операционных системах Microsoft Windows 98/NT/2000/Me/XP.

1. Программа PPPeriod для анализа скрытых периодичностей в последовательности событий.

Программа PPPeriod (**P**oint **P**rocesses **P**eriodicity) написана на языке Compaq Visual Fortran и представляет собой консольное приложение. Диалог с пользователем организован по принципу последовательности «вопрос-ответ» на английском языке. Целью программы является вычисление приращений максимума логарифмической функции правдоподобия для модели интенсивности точечного процесса с заданным периодом по отношению к максимуму логарифмической функции правдоподобия для модели чисто пуассоновского процесса с постоянной интенсивностью (для нулевой гипотезы). Значения периода сканируются в заданных пределах и те периоды, для которых эта разность имеет пик, существенно возвышающийся над уровнем фоновых статистических флуктуаций оценки, выделяют периодические компоненты потока событий. Детали метода изложены в Приложении П1.

Входным файлом программе может служить любая символьная таблица чисел, в первой колонке которой стоят монотонно неубывающие числа, интерпретируемые как значения моментов времени. Прочие колонки входного файла, если таковые имеются, игнорируются.

По выбору пользователя программа может работать в 2-х режимах:

- 1) оценка по всей имеющейся выборке;
- 2) оценка в скользящем временном окне заданной длины и с заданным взаимным смещением (в размерном времени).

После запуска программы необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Имя входного файла. Файл должен находиться в той же директории, что и загрузочный модуль программы. Если файла нет или он имеет неправильную структуру (например, в первой колонке входной таблицы значения убывают для каких-то строк), то программа завершает работу с соответствующим сообщением.
2. Ввести значения T_{\min} и T_{\max} - минимальных и максимальных значений периодов сканируемого диапазона периодов в размерном времени, то есть в тех же единицах времени, которые присутствуют во входном файле.
3. Ввести значение N_p - числа пробных значений периодов, покрывающих диапазон $[T_{\min}, T_{\max}]$ с шагом, равномерным в логарифмическом масштабе, то есть рассматриваются периоды:

$$T_j = 10^{\varphi_j}, \varphi_j = \lg(T_{\min}) + (j-1) \cdot \frac{\lg(T_{\max}) - \lg(T_{\min})}{(N_p - 1)}, \quad j = 1, \dots, N_p$$

4. Задать режим вычислений – по всей выборке или в скользящем временном окне.
5. Если задан режим оценки в скользящем окне, то необходимо ответить на дополнительные вопросы:
 - 5.1. Задать длину T_L скользящего временного окна в размерном времени.
 - 5.2. Задать смещение ΔT_L скользящих временных окон в размерном времени.
 - 5.3. Задать смещение T_{shift} временных меток в выводном grd-файле.

Если задан режим оценки по всей выборке, то в текущей директории создается выводной файл с именем "**PPP_out.dat**", который представляет собой таблицу из 3-х колонок длиной N_p строк. В первой колонке последовательно идут тестированные значения периодов T_j , во второй – разность $\Delta \ln(L)$ между максимумами логарифмических функций правдоподобия (формула (7) из **П1**), а в 3-й – значение безразмерного параметра $a, 0 < a \leq 1$ амплитуды гармонического колебания интенсивности процесса в модели (1).

Если задан режим оценки в скользящем временном окне то, в текущей директории создается выводной файл с именем "**PPP_out.grd**" в символьном grd-формате, готовый для построения 2-мерных или 3-мерных рельефов частотно-временных диаграмм для статистики $\Delta \ln(L)$ в пакете Surfer. При этом временные метки соответствуют значениям

$$T_{shift} + T_L + (k-1) \cdot \Delta T_L, k = 1, \dots, N_w,$$

где индекс k нумерует временные окна, N_w - общее число временных окон. Таким образом, временные метки соответствуют правым концам скользящих временных окон, взятых со смещением T_{shift} . Параметр T_{shift} может быть полезен, например, в ситуации, когда времена событий указываются в годах от начала 1900-го года, а на диаграмме полезно иметь метки в общепринятых годах – тогда задается $T_{shift} = 1900$.

Примеры применения.

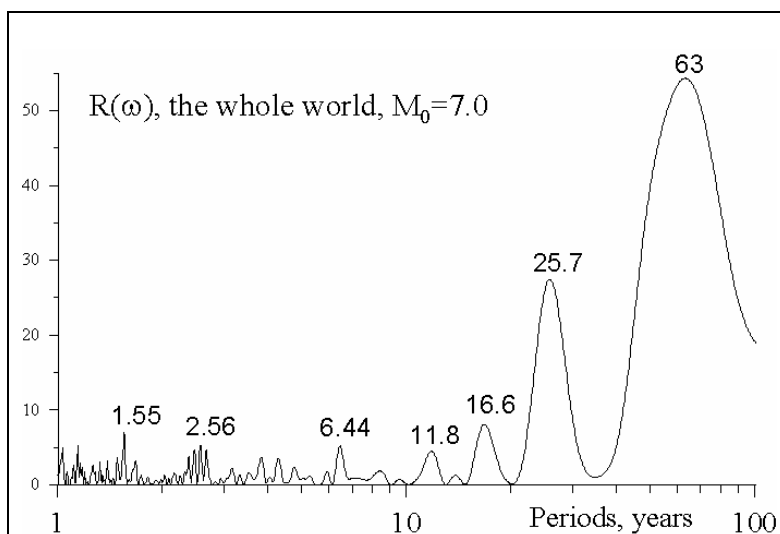


Рис.1. Статическая оценка по всей выборке для глобального каталога 1901-2001, $M_0=7.0$, глубина ≤ 100 км.

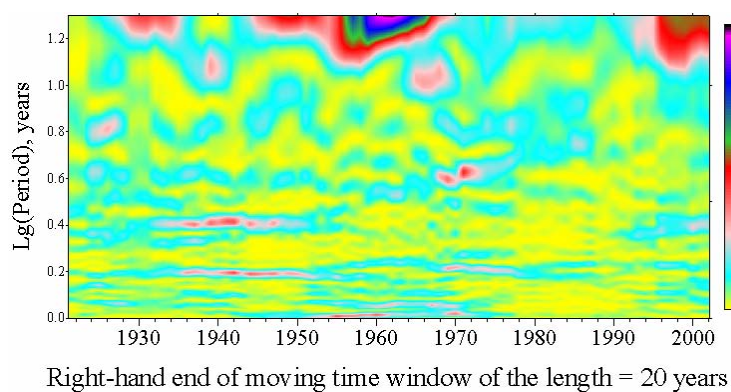


Рис.2. Частотно-временная диаграмма для глобального каталога 1901-2001, $M_0=7.0$, глубина ≤ 100 км.

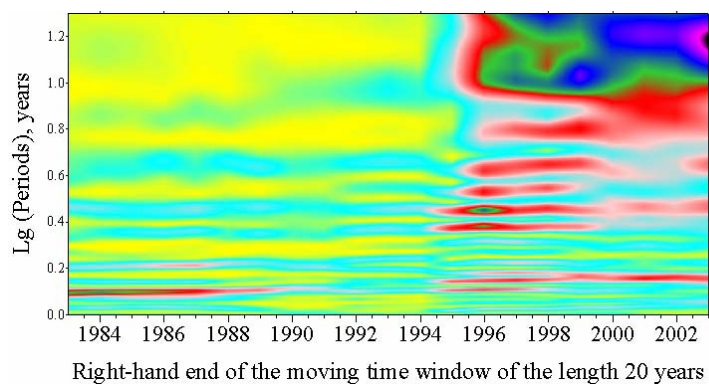


Рис.3. Частотно-временная диаграмма для региона: Япония + Курильские о-ва + Юг Камчатки 1963-2003, $M_0=6.0$, глубина ≤ 100 км.

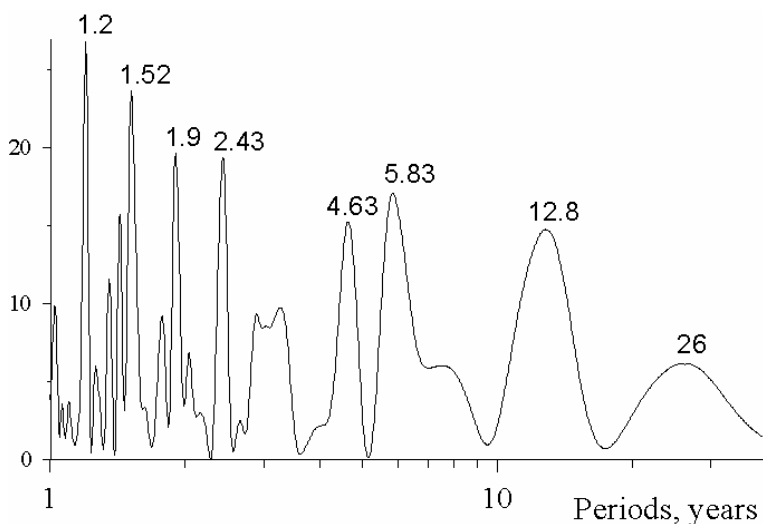


Рис.4. Статическая оценка по всей выборке для Калифорнии 1963-2001, $M_0=4.5$, глубина ≤ 100 км.

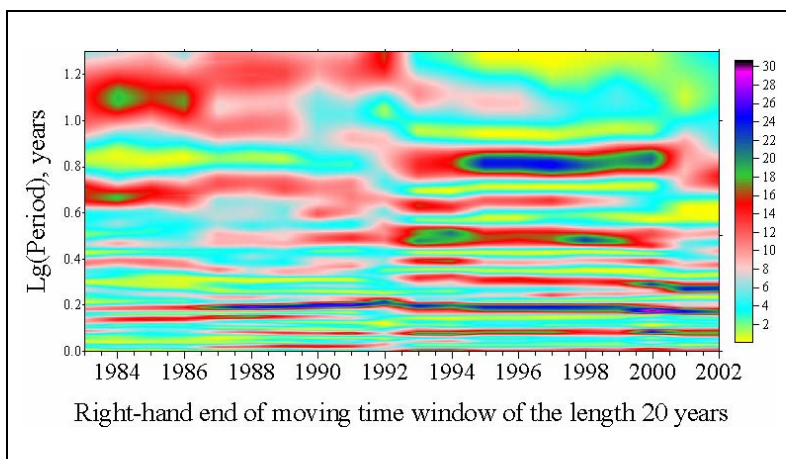


Рис.5. Частотно-временная диаграмма для Калифорнии 1963-2001, $M_0=4.5$, глубина ≤ 100 км.

Сейсмический режим в большой окрестности эпицентра землетрясения на Суматре 26.12.2004.

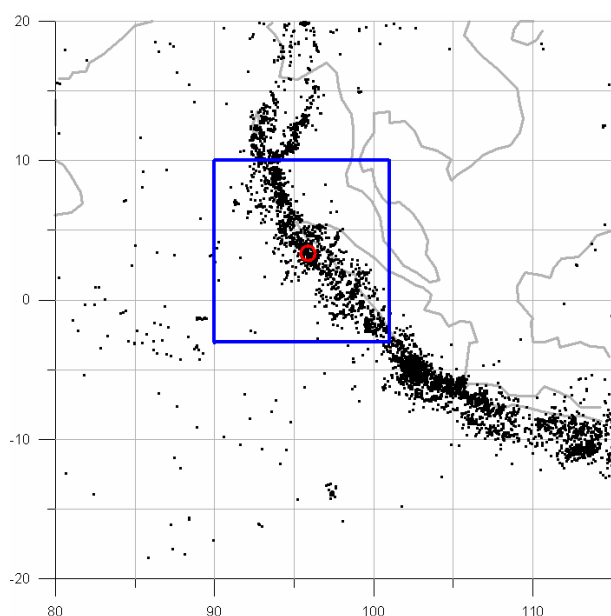


Рис.6. Распределение эпицентров землетрясений с магнитудами не менее 4.5 и глубинами эпицентров не более 100 км в Юго-Восточной Азии за период 1963-2004 гг. (строго до 26.12.2004), красный кружок – эпицентр землетрясения на Суматре 26.12.2004, $M=9$; прямоугольником выделена область рассмотрения сейсмического режима до момента толчка. Данные взяты из источника: <http://wwwneic.cr.usgs.gov/neis/>. Афтершоки не устранялись.

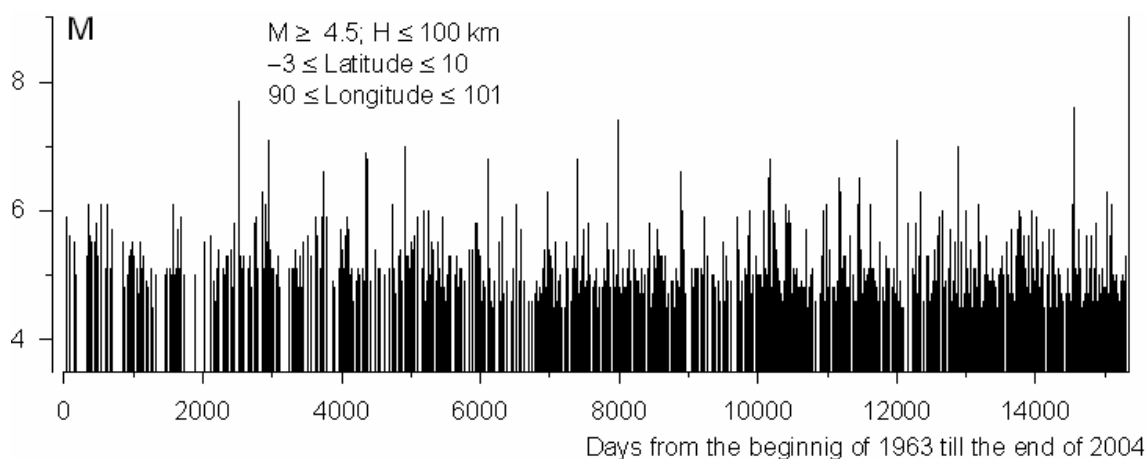


Рис.7. Последовательность сейсмических событий вместе со значениями их магнитуд за период 1963-2004 гг. внутри прямоугольной рамки на рис.6. Общее число событий строго до толчка 26.12.2004 равно 1387.

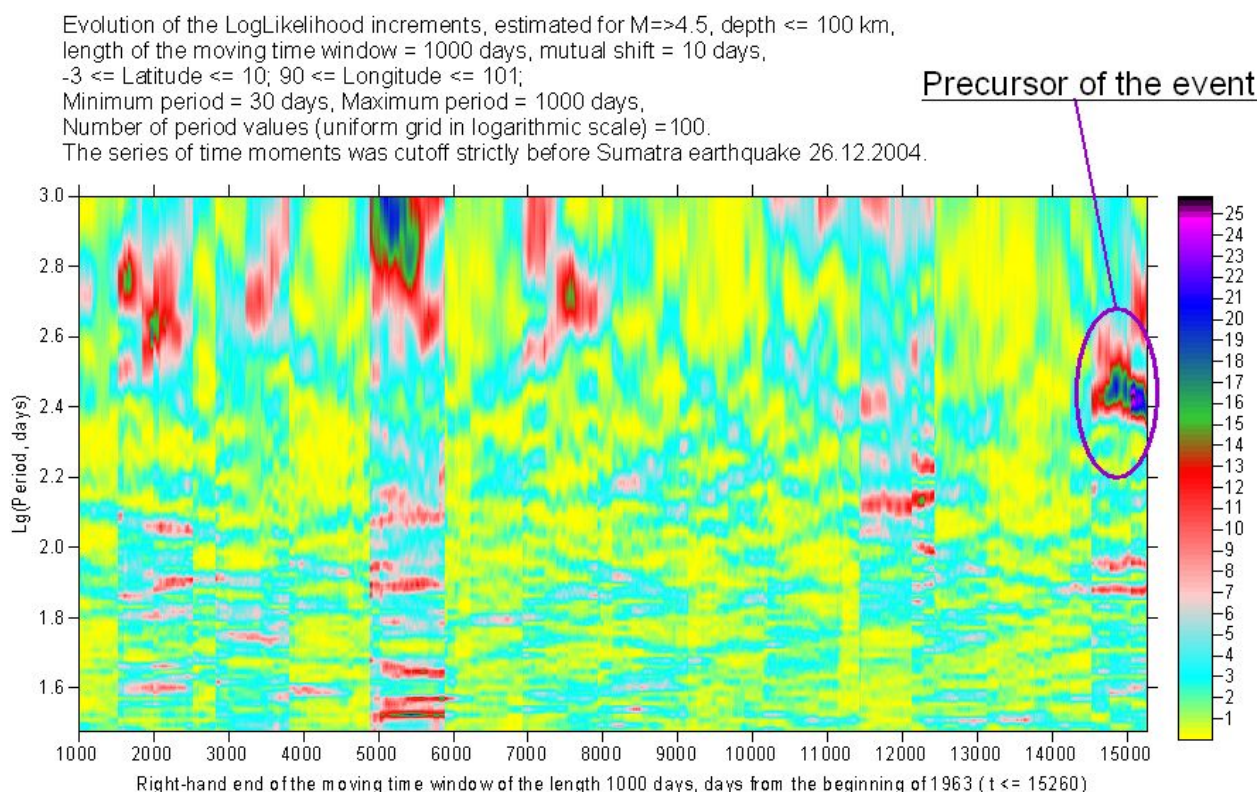


Рис.8. Эволюция приращения логарифмической функции правдоподобия $R(\omega, \tau | T_w)$ при оценке в скользящем окне длиной 1000 дней для периодов от 30 до 1000 суток.

Наконец, на рис.8 изображена частотно-временная диаграмма статистики $R(\omega, \tau | T_w)$, которая оценивалась в скользящем временном окне длиной 1000 суток со смещением 10 суток для пробных значений периодов (соответствующих частоте ω в формуле (1.2)) от 30 до 1000 суток. Эти периоды образовывали равномерную логарифмическую шкалу. Поскольку из временной последовательности не устранялись афтершоки, то частотно-временная диаграмма имеет характерную линейчатую структуру с умеренными всплесками статистики $R(\omega, \tau | T_w)$ в афтершоковых сериях сильных землетрясений. Диаграмма на рис.8 имеет два существенных всплеска. Один – на максимальных периодах 800-1000 суток для временных меток правого конца окна от 5000 до 6000 дней от начала 1963 г. Величина этого всплеска приращения логарифмической функции правдоподобия равна 20. Второй и наиболее значительный (амплитуда всплеска = 25.8) возник внутри афтершоковой серии предыдущего сильного землетрясения (02.11.2002, $M=7.6$, $\text{Lat}=2.82$, $\text{Lon}=96.08$), происшедшего за 2 года до катастрофы. Характерный период этого второго всплеска – примерно 250-320 суток. На этих периодах за все время рассмотрения не было ни одного столь же значительного увеличения, несмотря на то, что землетрясения такой силы были в реализации, представленной на рис.7. Таким образом, эту частотно-временную аномалию можно рассматривать как своего рода предвестник землетрясения на Суматре, детектированного за 2 года до события, после того как правая часть скользящего окна достаточно глубоко вошла в серию афтершоков предыдущего толчка. Для проверки статистической значимости этого предвестника была сгенерирована серия из 10^5 событий, моменты времени которых распределены случайно, согласно распределению Пуассона с интенсивностью, равной средней интенсивности событий и для этой серии оценена эволюция приращения логарифмической функции правдоподобия с теми же параметрами, что и для диаграммы на рис.8. В результате максимальный всплеск статистики $R(\omega, \tau | T_w)$ оказался равным 10.8 – это свидетельствует о статистической значимости всплеска перед землетрясением на диаграмме рис.8.

2. Интерактивная программа Spectra Analyzer для разведочного анализа свойств скалярных временных рядов, автор – А.А.Любушин, ИФЗ РАН, Москва.

Программа написана на языке Visual Basic, на котором реализован пользовательский интерфейс. Вся вычислительная работа выполняется динамически подключаемой библиотекой (DLL – dynamic link library) под именем SigSub.dll, которая содержит все численные процедуры спектрального анализа, вейвлет-пакетных разложений, выделения и устранения тренда и т.д. Библиотека SigSub.dll написана на языке Compaq Visual Fortran. Файл SigSub.dll должен находиться в той же директории, что и загрузочный модуль программы Spectra_Analyzer.exe.

Помимо этого dll-файла, программа использует еще следующие: Dforrtd.dll, kernel32.dll, msvbvm60.dll, Msvcrt.dll. К этим файлам должен быть доступ, то есть они должны быть в директориях c:/windows/system или в c:/windows/system32 или быть в той же директории, что и Spectra_Analyzer.exe. Файл kernel32.dll является компонентом операционной системы, файл msvbvm60.dll – среды программирования Visual Basic 6.0 и более старших версий (также часто является стандартным dll-файлом операционных систем Microsoft), файлы Dforrtd.dll и Msvcrt.dll поставляются в составе Compaq (или Digital) Visual Fortran.

Ниже будут перечислены функции программы, причем в скобках будут указаны пункты блок схемы на Рис.3, реализующие те или иные функции, а также пункт из Приложения, в котором описан метод, если такой имеется. Программа выполняет следующие операции для скалярного временного ряда:

- 1) оценивает спектр мощности (Spectral Analysis → Maximum Entropy AR-estimates and Fourier based estimates, **П5**);
- 2) оценивает тренд и выполняет процедуру устранения тренда с помощью сглаживания гауссовскими ядрами с заданным масштабом усреднения или локальными полиномами с заданным порядком полинома (от 0 до 10) и в скользящих окнах заданного радиуса (Operations with selected fragment → Smoothing and detrending using Gaussian kernels or local polinoms within moving time window; частично **П6**, формула (34));
- 3) выполняет полосовую частотную фильтрацию временного ряда, пропуская гармоники с частотами в выбранной полосе (Spectral Analysis → Maximum Entropy AR-estimates and Fourier based estimates → Zooming Spectra Estimates, selecting frequency band and band-pass filtering);
- 4) оценивает эволюцию логарифма спектра мощности в скользящих временных окнах заданной длины (Spectral Analysis → Estimates of Lg(Spectra) Evolution within moving time window using AR-model, **П5**);
- 5) осуществляет ортогональное вейвлет-пакетное разложение сигнала с расщеплением каждого уровня детальности в 1, 2, 4 или 8 раз (Orthogonal Wavelet-Packet Decomposition, **П2**);
- 6) производит нелинейную пороговую вейвлет-фильтрацию с оптимальным вейвлетом и порогом Донохо-Джонсона, вычисляемые программой, или с другим вейвлетом и степенью сжатия сигнала, выбираемых пользователем (Nonlinear Wavelet Threshold Filter, **П3**);

- 7) выделяет длинные цепи скелета максимума модулей непрерывных вейвлет-преобразований с использованием 1-й и 2-й производной от гауссиана в качестве вейвлета (Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal → Long chains of wavelet transform skeletons for 3 types of Gaussian kernel derivatives (of the orders 0, 1 and 2), **П6**);
- 8) вычисляет частотно-временную диаграмму логарифма квадрата модуля непрерывного вейвлет-преобразования Морле (Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal → Continuous Morlet Wavelet Transform 2D-diagram, **П4**);
- 9) вычисляет частотно-временную диаграмму логарифма квадрата модулей ортогональных вейвлет-пакетных коэффициентов с расщеплением каждого уровня детальности в 1, 2, 4 или 8 раз («ящики Гейзенберга») (Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal → Orthogonal Wavelet-Packet Heisenberg Boxes 2D-diagram; **П2**);
- 10) осуществляет подгонку для временного ряда низкочастотной гармоник с неизвестным периодом, который находится из условия минимума дисперсии остатка (Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal → Seeking the best-fitted low-frequency harmonic with unknown period);
- 11) ищет 2 экстремальные точки, период и амплитуду «максимального всплеска» для выделенных фрагментов длиной не более 500 отсчетов (Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal → Seeking 2 extreme points of the "maximum wave").
- 12) оценивает мультифрактальный спектр сингулярности для выделенных фрагментов длиной не менее 400 отсчетов (Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal → Singularity Spectrum"; **П7**).

Кроме того, программа может осуществлять следующую предварительную обработку (Preprocessing):

– Переход к большему интервалу дискретизации (Downsampling), причем увеличение интервала отсчетов может быть либо целочисленным, либо дробным большим 1. Для целочисленного увеличения производится вычисление последовательных средних от временного ряда на временных окнах длиной 2, 3, 4 и т.д. отсчетов, причем одновременно вычисляется и выводится в специальный файл дисперсия отклонений исходного ряда от этих последовательных средних. Для дробных увеличений, больших 1, переход осуществляется с помощью преобразования Фурье, подавления гармоник с периодами выше новой частоты Найквиста, обратным преобразованием Фурье и линейной интерполяцией между имеющимися отсчетами с первоначальным шагом по времени. Заметим, что увеличение шага дискретизации в целое число раз можно осуществить также и с помощью преобразования Фурье, если это увеличение задать не целым числом, а числом «с точкой», например, если вместо 3 ввести 3.0. Следует заметить, что при использовании преобразования Фурье для увеличения шага дискретизации возможны искажения на концах сигнала из-за циклического эффекта преобразования Фурье от конечной выборки.

– Переход к временному ряду в приращениях (Coming to Increments);

– Итеративное устранение больших выбросов путем т.н. «винзоризации» (WinzORIZATION): вычисления среднего значения \bar{x} , стандартного отклонения σ , операции срезки значений временного ряда выпадающих за уровни $\bar{x} \pm 4 \cdot \sigma$ и повторения этой последовательности 3-х операций до тех пор, пока значения \bar{x} и σ не перестанут меняться.

Входным файлом программе может служить любая символьная таблица чисел, в первой колонке которой стоят числа, интерпретируемые как значения временного ряда. Прочие колонки входного файла, если таковые имеются, игнорируются.

Если есть необходимость демультиплексировать таблицу на файлы-колонки, то это можно сделать, нажав на главной форме кнопку “D” - в этом случае будут автоматически созданы одно-колоночные файлы, имеющие в своих именах сочетания “_Col01”, “_Col02” и т.д. Программа сама определяет сколько числовых колонок находится во входной таблице, начиная от первой слева и демультиплексирует их.

Ниже приведена блок-схема интерфейса программы, которая может быть вызвана из подменю Help:

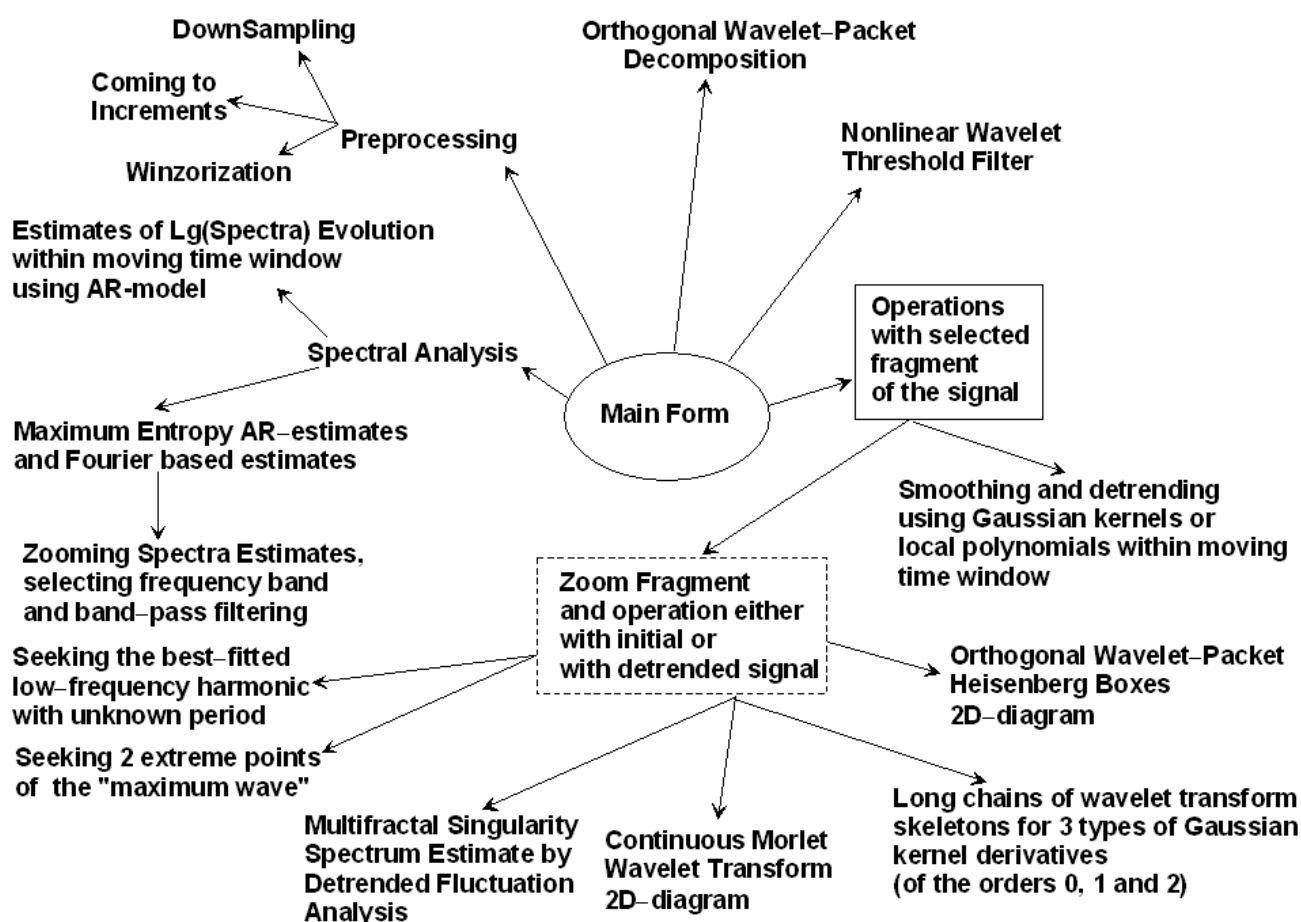


Рис.9. Блок-схема пользовательского интерфейса программы Spectra_Analyzer.

Программа по желанию пользователя сохраняет результаты в файлах, которые имеют в своих именах следующие мнемонические аббревиатуры и расширение либо “dat” либо “grd”:

Sp_AR(...) – спектральные оценки на основе метода максимальной энтропии с использованием AR-модели;

Sp_Four(...) – спектральные оценки на основе преобразования Фурье и усреднения периодограмм с заданным радиусом частотного усреднения;

BPF – после полосовой пропускающей фильтрации (band pass filtering);

TRN – тренд, вычисленный с помощью гауссовского ядерного усреднения с заданным масштабом, либо с помощью локальных полиномов заданного порядка от 0 до 10 в скользящем окне заданного радиуса;

RSD – остаток (residual) после удаления тренда;

INC – приращения (increments) временного ряда;

DNS – после операции перехода к большему значению интервала дискретизации (DownSampling) в заданное число раз r_D . При этом:

Если $r_D \geq 2$ - целое число, то увеличение интервала дискретизации происходит путем вычисления последовательных средних значений на отрезках длиной r_D отсчетов;

Если $r_D > 1$ - дробное число, то увеличение интервала дискретизации производится с помощью преобразования Фурье от выборки, устранения гармоник с частотами выше новой частоты Найквиста и линейной интерполяции между соседними отсчетами после обратного преобразования Фурье. При этом возможны искажения на концах выборки из-за циклического эффекта преобразования Фурье от конечной выборки.

Var.DNS – значения выборочной оценки дисперсии после операции DNS при $r_D \geq 2$ - целое число, на каждом интервале вычисления среднего значения по последовательным участкам длиной r_D отсчетов;

WINZ – после операции итеративной срезки больших выбросов (винзоризации);

PART[Tstart,Tfinish] – после операции выделения части временного ряда, соответствующего временным меткам от Tstart до Tfinish;

WDC – компонента ортогонального вейвлет-пакетного (Wavelet-packet Decomposition Component) разложения сигнала, которая может быть автоматически сохранена путем двойного щелчка мышью по графику компоненты на графическом окне вейвлет-пакетного разложения;

WaveSp(...) – вейвлет-пакетный спектр мощности, то есть усредненные по моментам времени значения квадратов модулей вейвлет-пакетных коэффициентов для последовательных значений масштабов, соответствующих центрам вейвлет-пакетных частотных полос;

Lg(Sp)*.grd – символьный grd-файл частотно-временной карты эволюции логарифма спектра мощности в скользящем временном окне данной длины;

THR-MAIN – результат нелинейной пороговой фильтрации (thresholding) временного ряда после обнуления заданной части минимальных по модулю вейвлет-коэффициентов;

THR-RSD – остаток от операции нелинейной пороговой фильтрации (thresholding residual);

$Lg(WaveCoeff^2)_{*}.grd$ – символьный grd-файл частотно-временной карты эволюции логарифма квадрата модуля непрерывного вейвлет-преобразования Морле;

$Sp(WaveCoeff^2)_{*}.dat$ – спектр мощности Морле, то есть усредненные по моментам времени значения квадратов модулей вейвлет-коэффициентов Морле для последовательных значений используемых масштабов;

$Lg(AbsWaveCoeff_HBoxes)_{*}.grd$ – символьный grd-файл частотно-временной карты значений логарифма квадратов модулей вейвлет-пакетных коэффициентов (ящики Гейзенберга);

$F(Alfa)_{*}.dat$ – мультифрактальный спектр сингулярности для выделенного фрагмента сигнала, оцененный методом анализа флуктуаций после исключения масштабнo-зависимых трендов.

Все оценки спектров мощности различного вида автоматически сохраняются в поддиректории 'SpectEstimates', а все grd-файлы – в поддиректории 'GRID_files' той директории, где находятся данные.

Далее приводятся примеры анализа данных через копии экрана пользовательского интерфейса. Общая рекомендация: «лазить мышью» во все графические окна, при этом «на кончике мыши» появляется много полезной информации (mouse tooltips) как о самих данных, так и о результатах анализа.

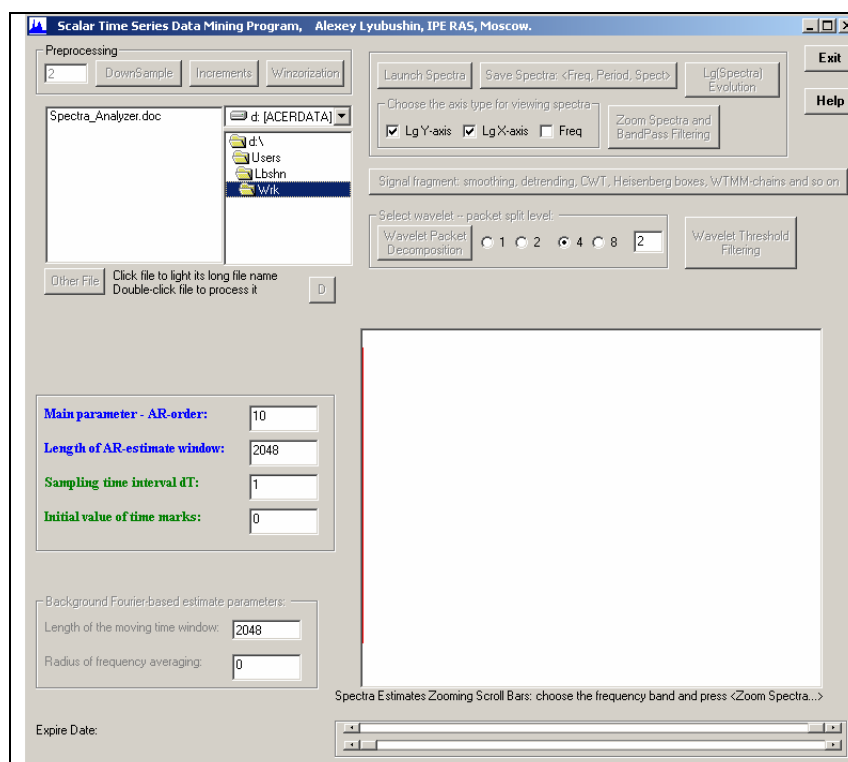


Рис.10.

Программа после запуска – доступен лишь Exit и Help.

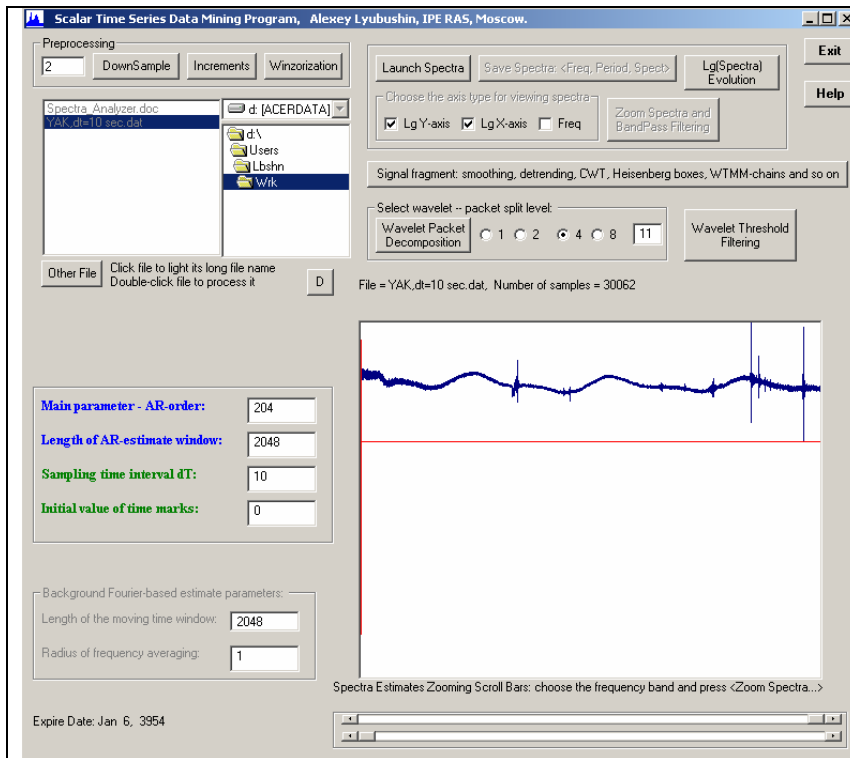


Рис.11.

Здесь выбран входной файл и установлено значение его интервала опроса – 10 секунд и начальная временная метка для первого отсчета – 0. Ряд содержит большие выбросы – подвергнем его винзоризации. Тогда получим вот что:

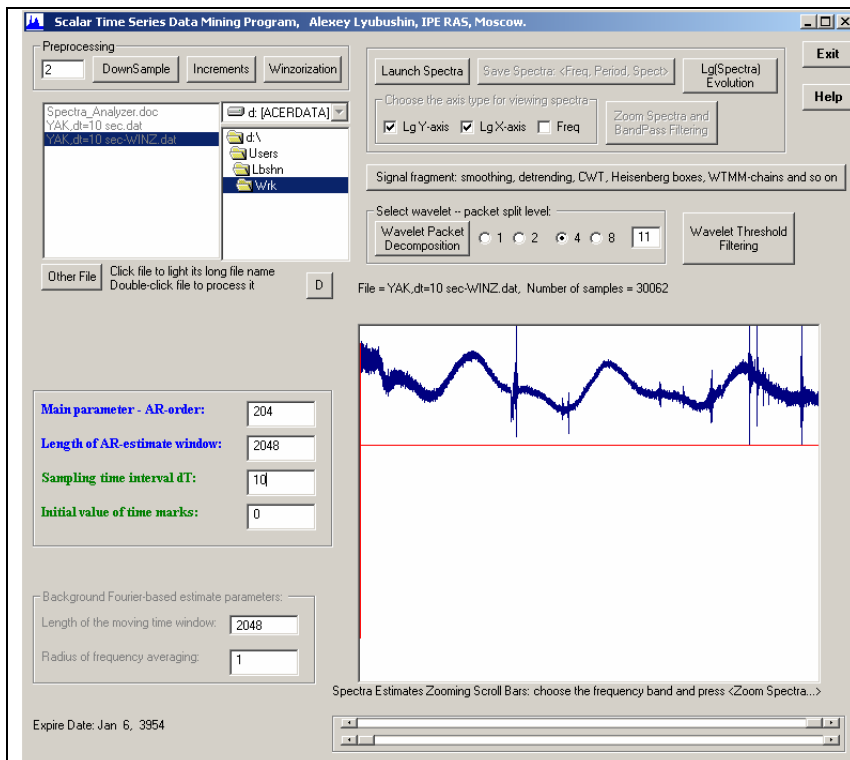


Рис.12.

– ряд после итеративного устранения больших выбросов. Оценим его спектры мощности с параметрами по умолчанию в двойном логарифмическом масштабе в зависимости от периодов (признак Freq не помечен – иначе был бы в зависимости от частоты).

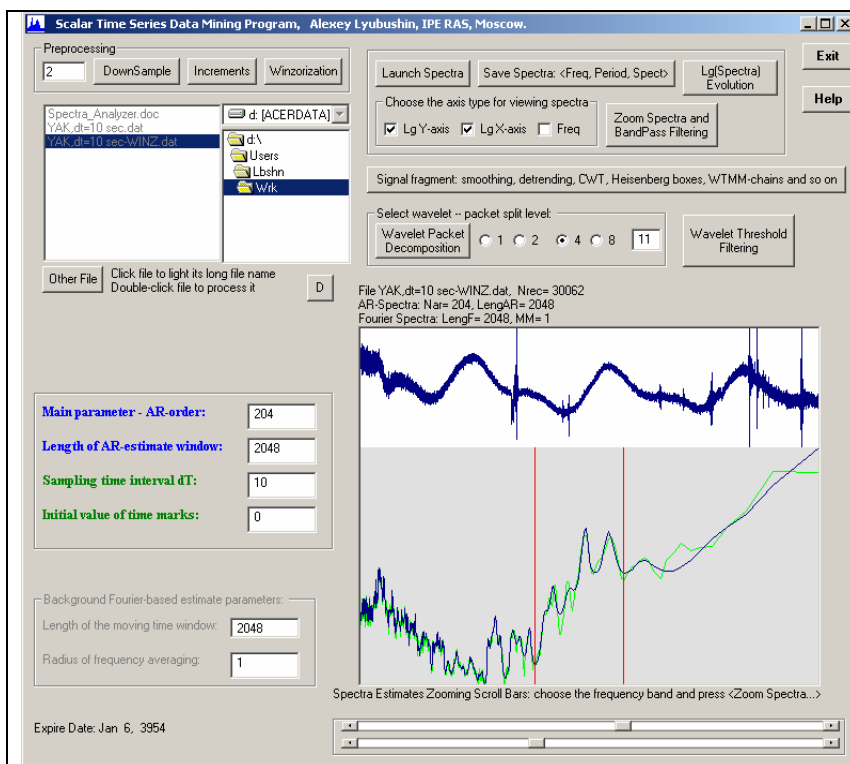


Рис.13.

Приведены 2 графика оценок спектра мощности – AR-оценка максимальной энтропии (темно-синий цвет) и вспомогательная, «фоновая» Фурье-оценка (светло-зеленый цвет). Выделим с помощью горизонтальных ползунков и вертикальных красных линий интересующую нас частотную полосу посмотрим ее подробнее, нажав кнопку Zoom Spectra:

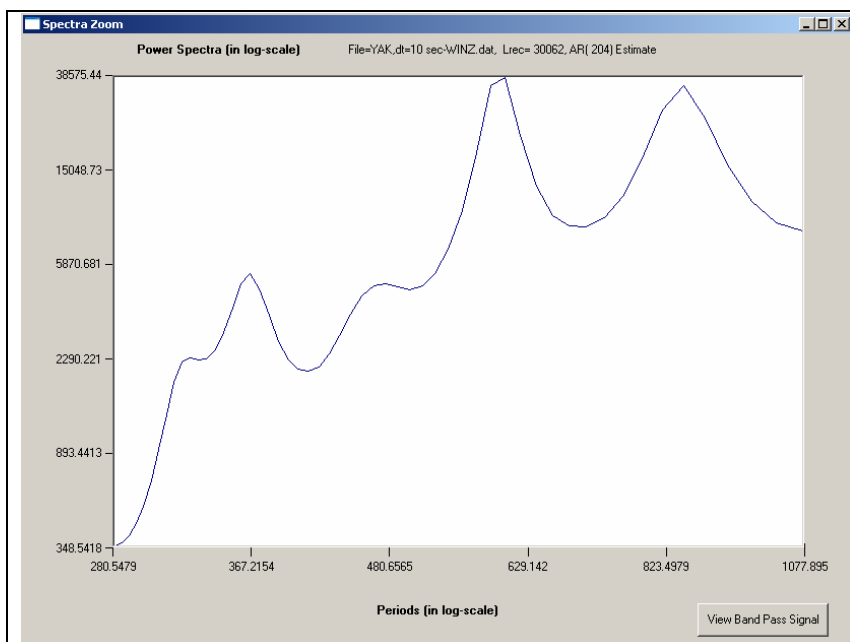


Рис.14.

– Zoom Spectra. Нажав кнопку View Band Pass Signal, можно посмотреть на результат частотной пропускающей фильтрации в выбранной полосе и, при желании, сохранить результат фильтрации в виде отдельного файла:

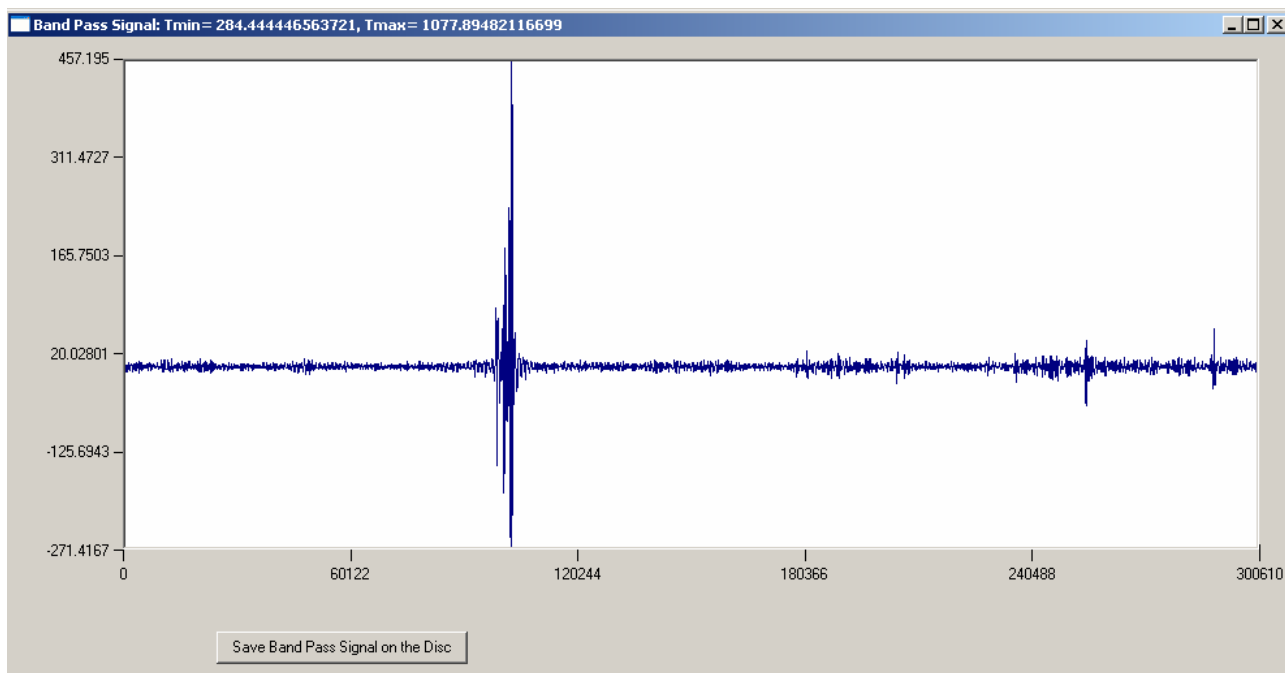


Рис.15.

Уменьшим число отсчетов в ряду, перейдя к 1-минутным интервалам путем усреднения и прореживания в 6 раз (DownSample: 6):

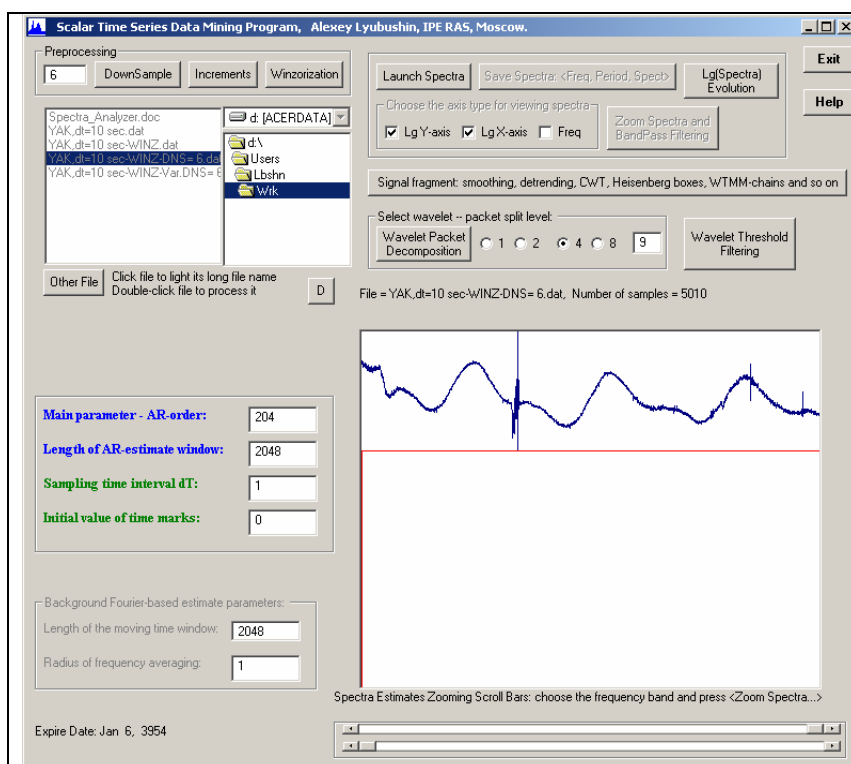


Рис.16.

– ряд после усреднения и прореживания в 6 раз, $\delta t = 1$ минута. Подвергнем этот ряд операции нелинейной вейвлетной пороговой фильтрации (Wavelet Threshold Filtering):

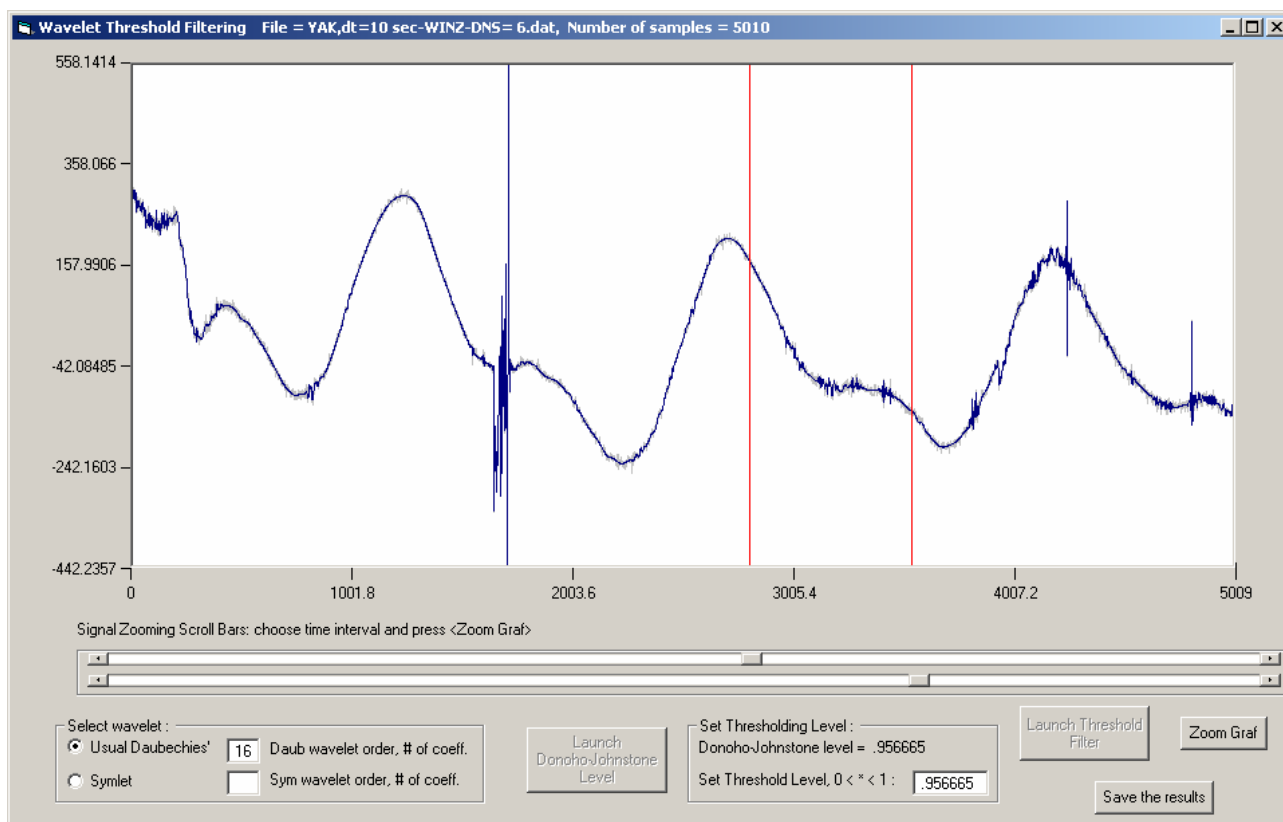


Рис.17. Программа сама определила оптимальный вейвлет – Daub16 (его можно поменять) и порог Донохо-Джонстона 0.956665 (от него можно отказаться и применить свой). При применении этих параметров результат обратного преобразования от всего лишь 4.34% вейвлет-коэффициентов показан темно-синим цветом, все прочее ушло в шум (бледно-серая линия). Этот результат можно посмотреть подробнее для любого фрагмента, выделяемого вертикальными ползунками между красными линиями:

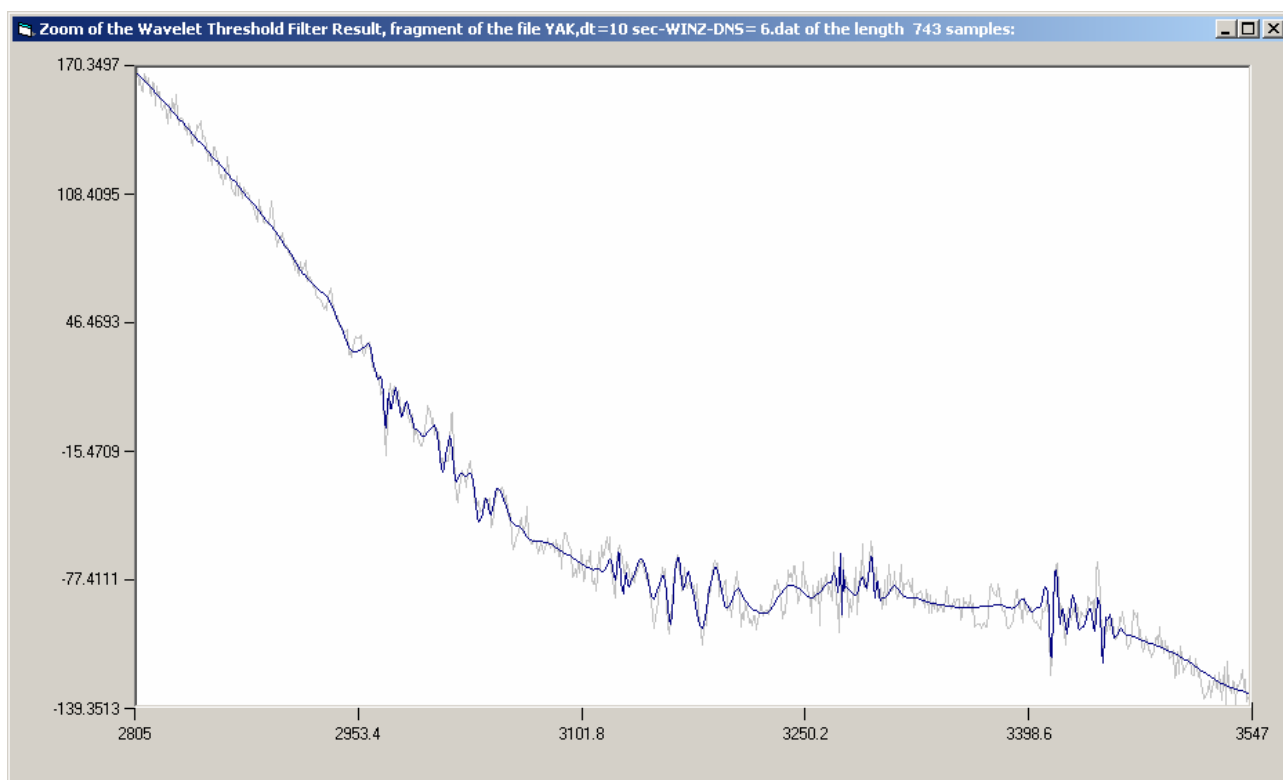


Рис.18.

Сохранив результат пороговой нелинейной фильтрации, можно, например, подробно посмотреть на шумовую компоненту сигнала:

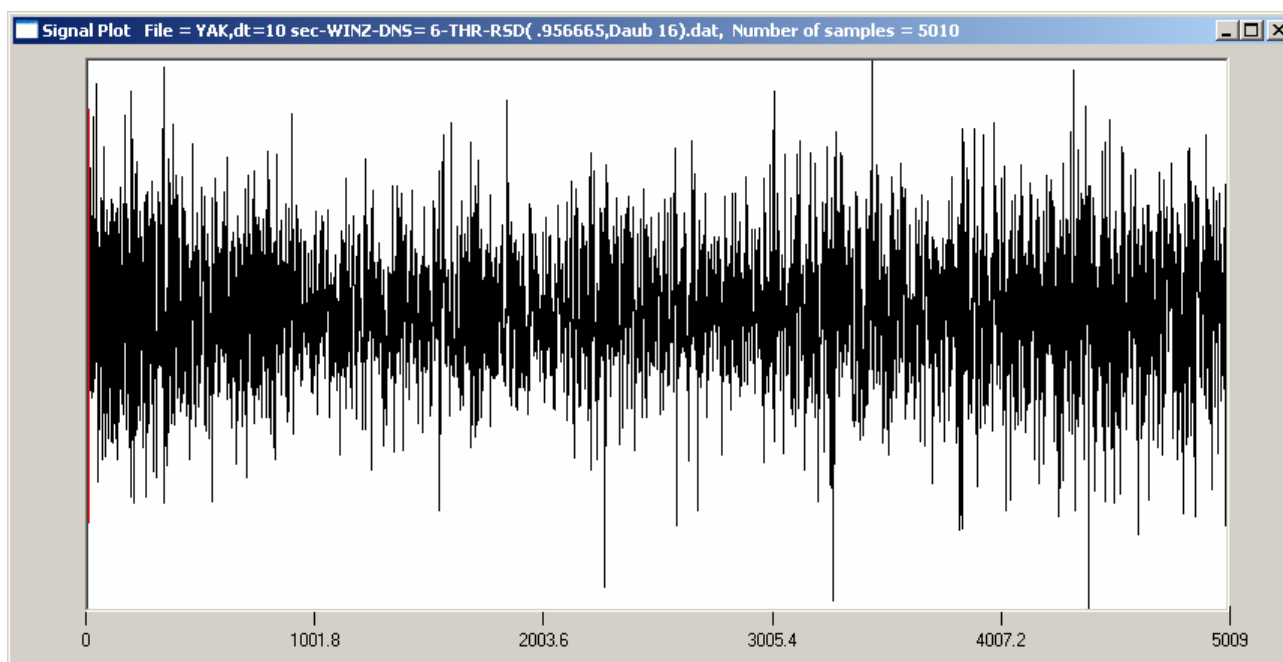


Рис.19.

Следует обратить внимание, что в шапке каждой формы видно длинное имя файла, дающее всю историю обработки. Здесь – это винзоризация, усреднение и прореживание в 6 раз, пороговая фильтрация вейвлетом Daub16 с порогом 0.956665, остаток (THR-RSD).

Вернемся к исходному сигналу с 1-минутными отсчетами и устраним его тренд. Для этого надо зайти в подменю Signal Fragment:

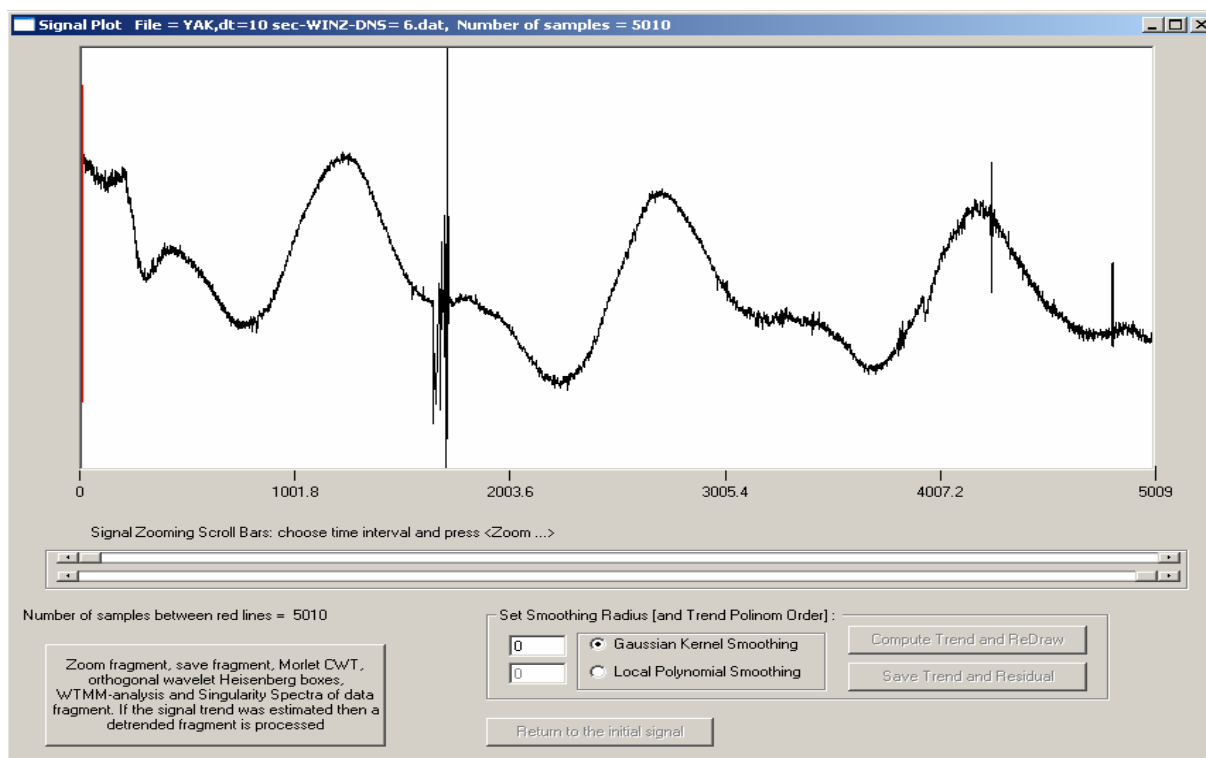


Рис.20.

Выберем гауссовское ядерное сглаживание с параметром масштаба 100 и посмотрим на результат:

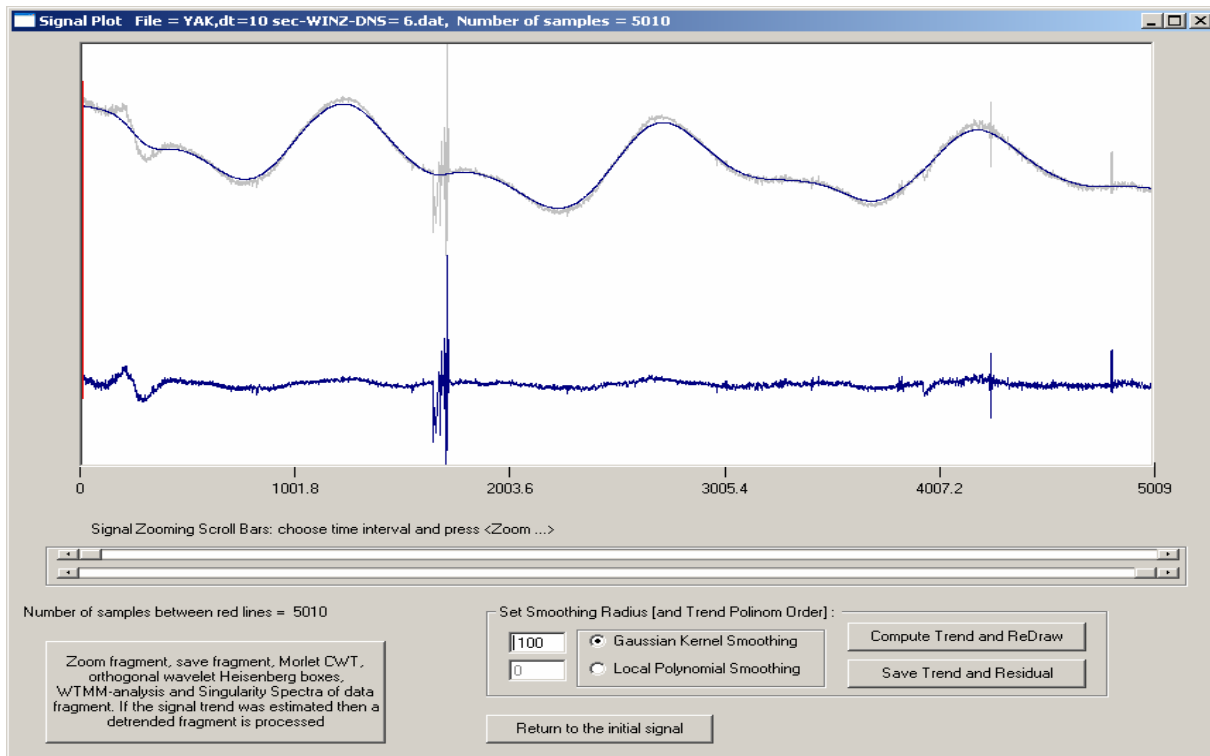


Рис.21.

Результат в целом удовлетворителен, но на экстремумах плавной трендовой кривой она недотягивает до сигнала. Этот недостаток можно устранить, уменьшив параметр масштаба, а можно перейти на устранение тренда локальными полиномами. В этом случае оставим параметр 100, но он будет уже радиусом окна усреднения. Положим порядок полинома 3 (минимальный порядок с точкой перегиба). Результат будет следующим:

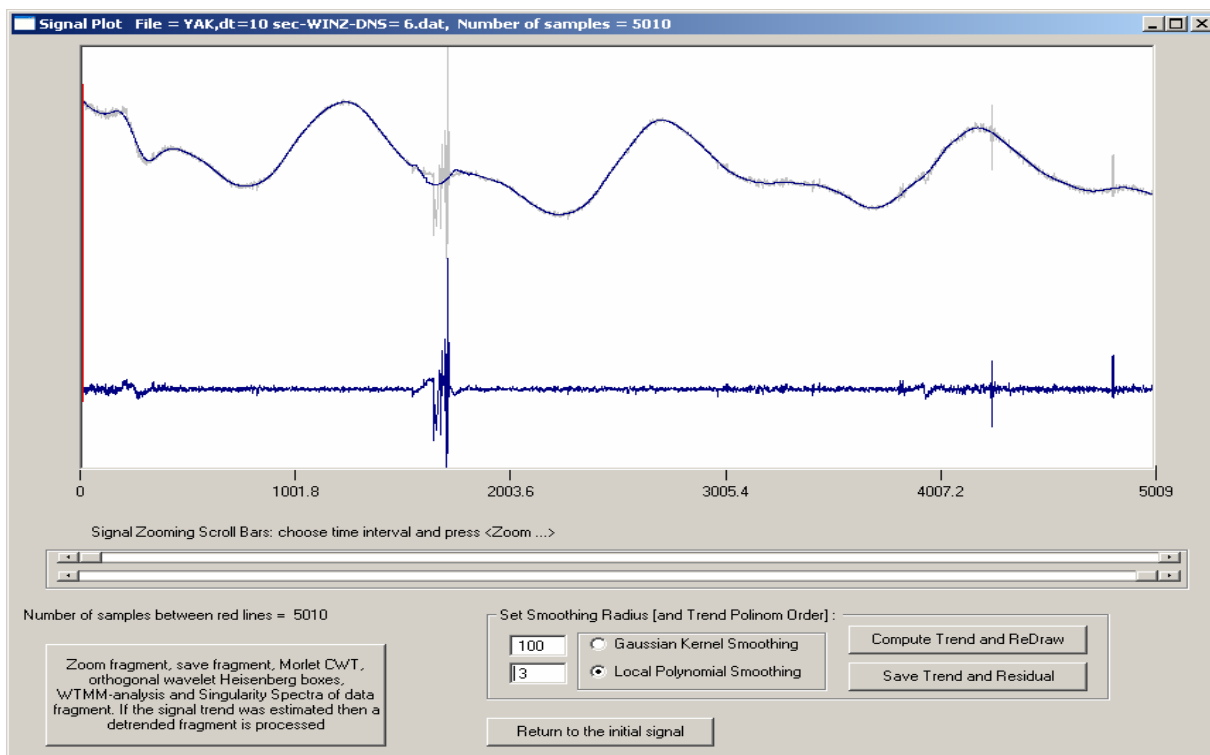


Рис.22.

Можно посмотреть детали операции устранения тренда, если выделить интересующий нас фрагмент горизонтальными ползунками и вертикальными красными линиями:

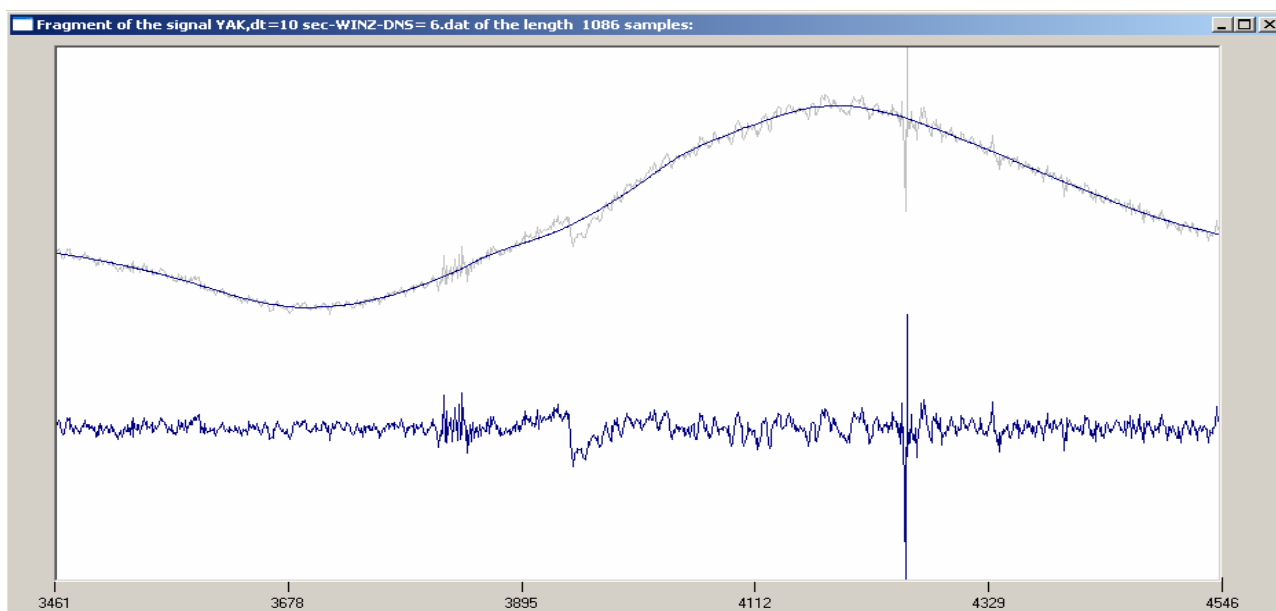


Рис.23.

Сохраним результаты вычисления тренда и остатка от устранения тренда и будем работать с остатком. Зайдем в меню Operations with selected fragment → Zoom Fragment and operation either with initial or with detrended signal:

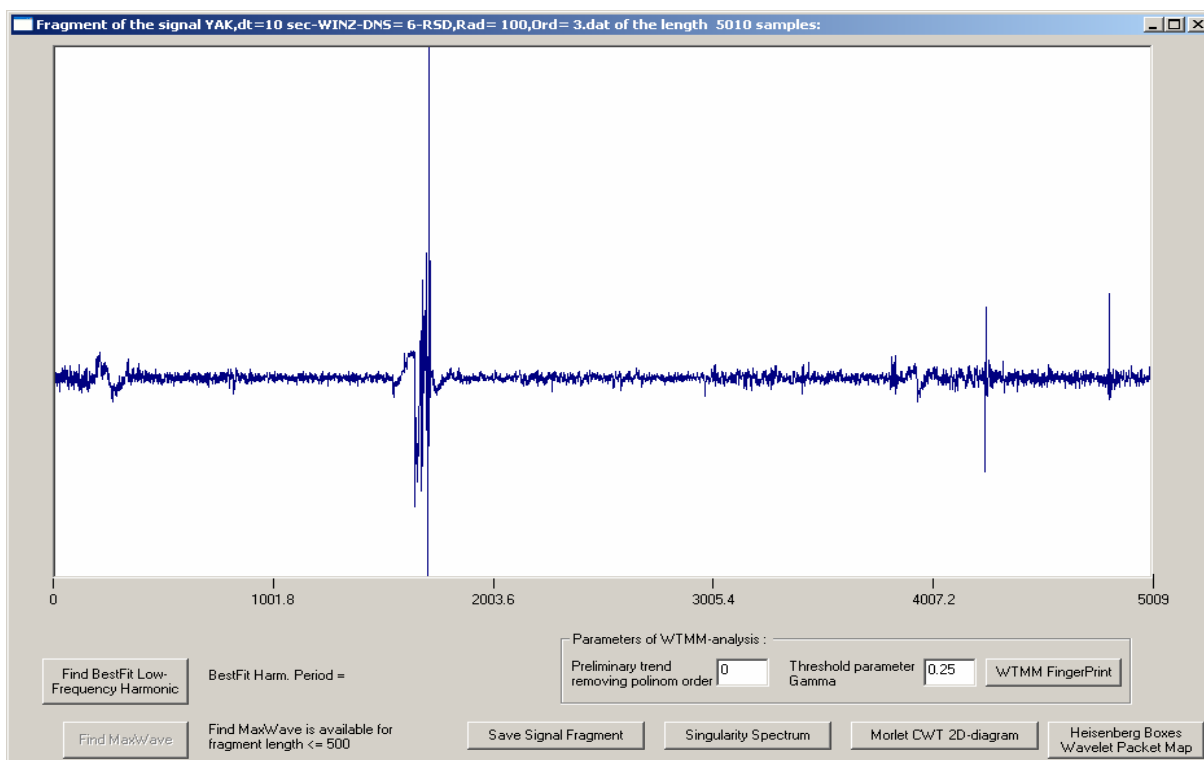


Рис.24.

и нажмем кнопку вычисления диаграммы Морле:

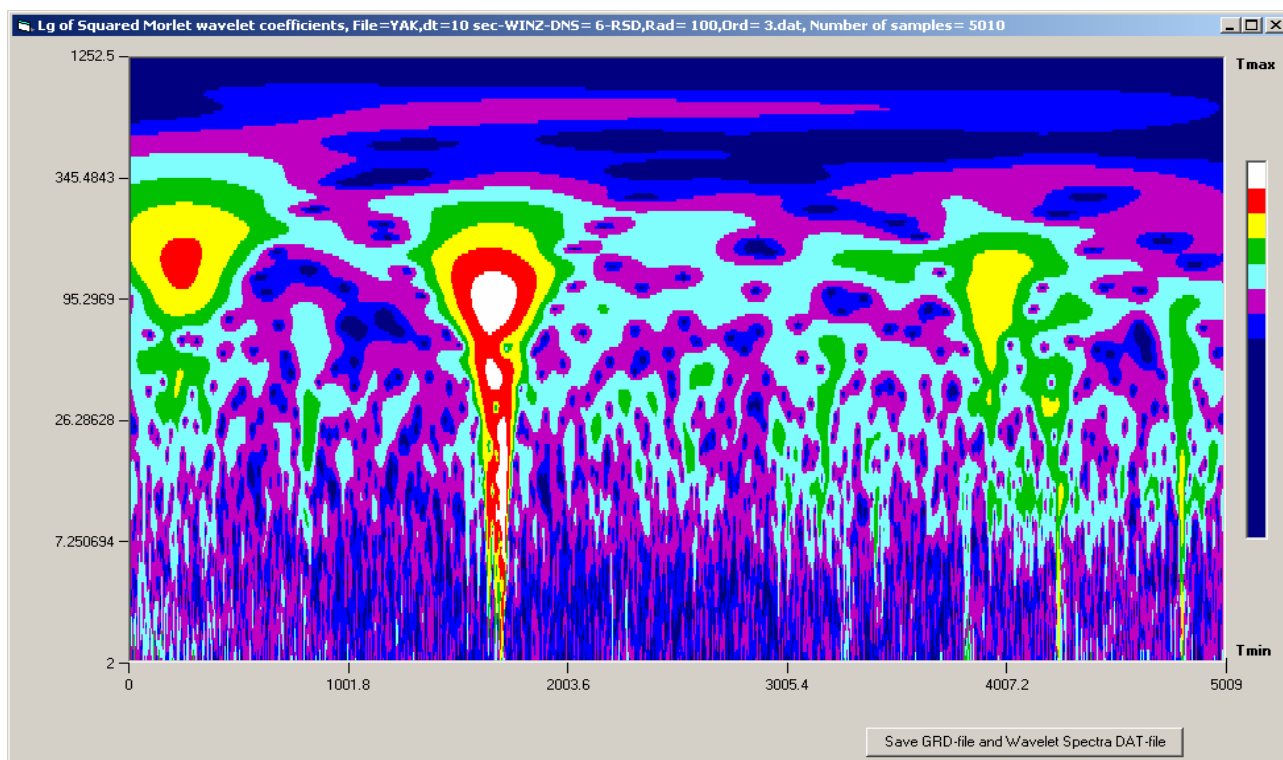


Рис.25.

которая дает распределение логарифма энергии пульсаций по времени и периодам. Возможно сохранение этой картинки в виде grd-файла с последующим построением в пакете Surfer.

Иная форма представления – ящики Гейзенберга:

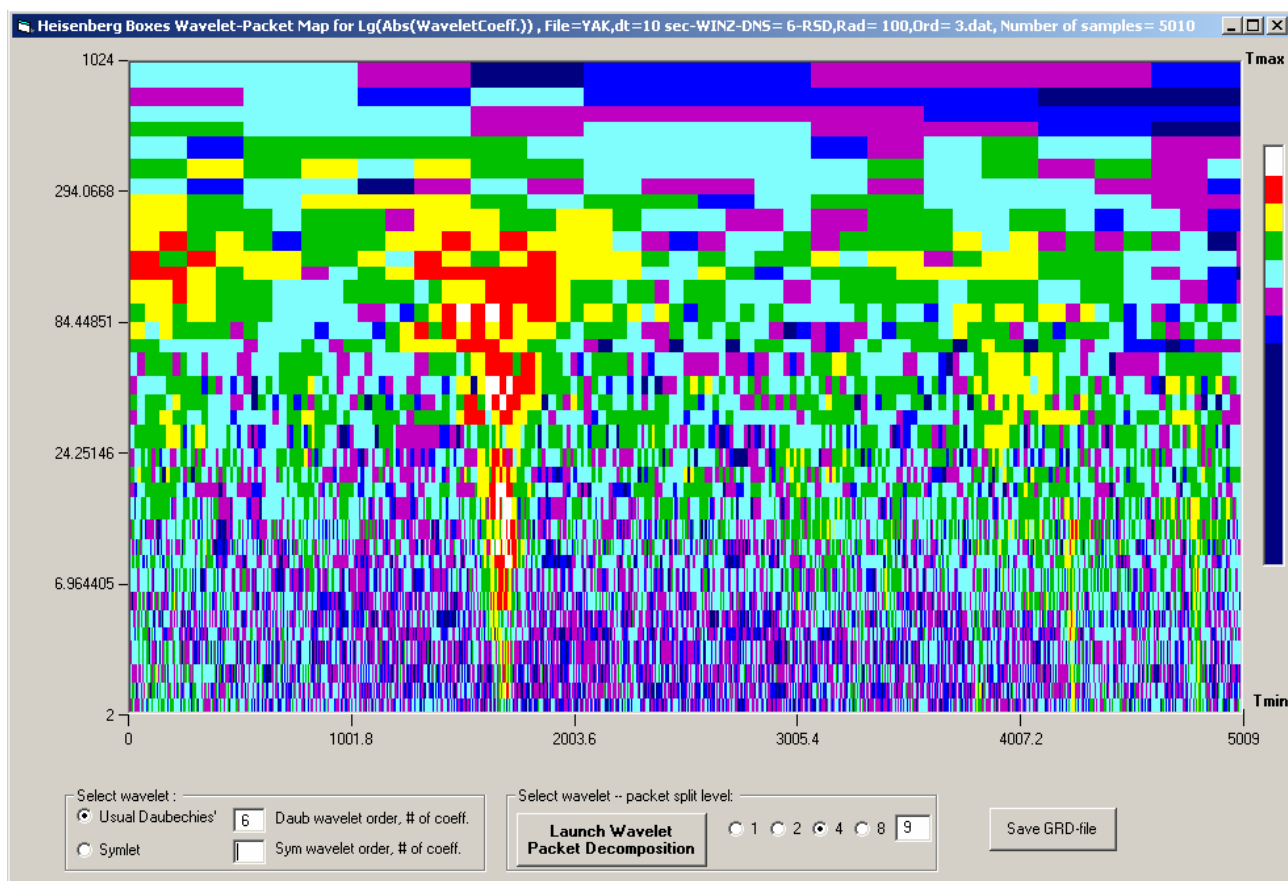


Рис.26.

Здесь дано расщепление каждого уровня в 4 раза, всего 9 уровней и 36 подуровней. Если взять обратное преобразование от вейвлет-пакетных коэффициентов, то получится разложение в виде последовательности временных сигналов (подменю Wavelet-Packet Decomposition):

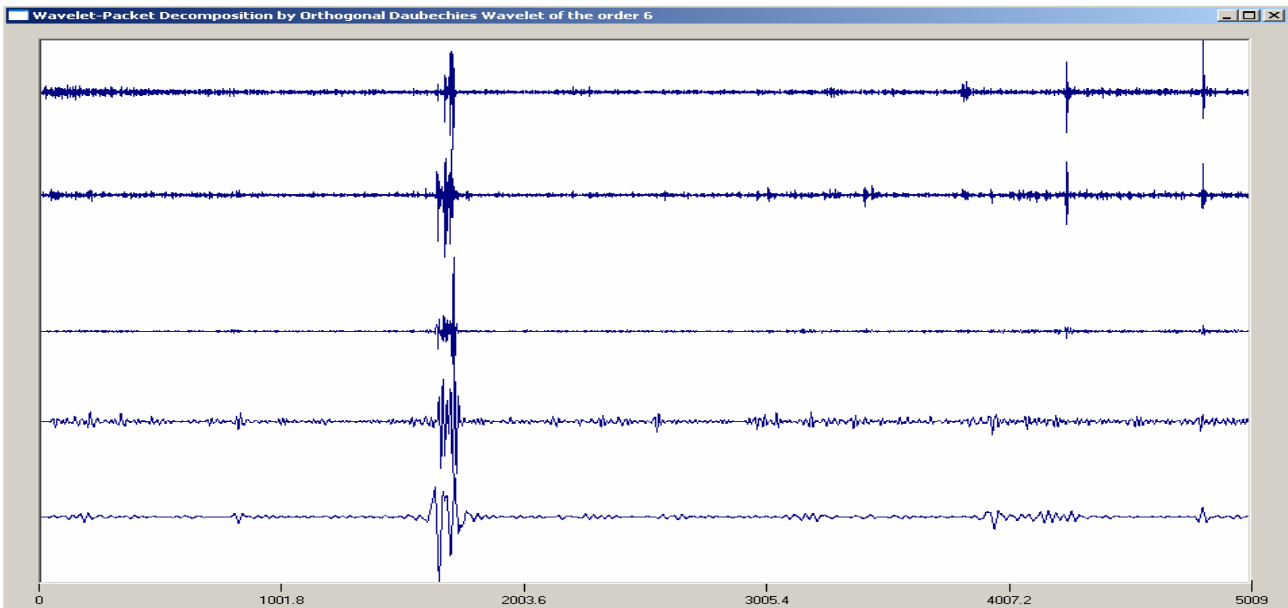


Рис.27.

Здесь дано обычное вейвлет-разложение по первым 5 уровням детальности. Если эти уровни расщепить каждый в 8 раз, то получится следующая картина:

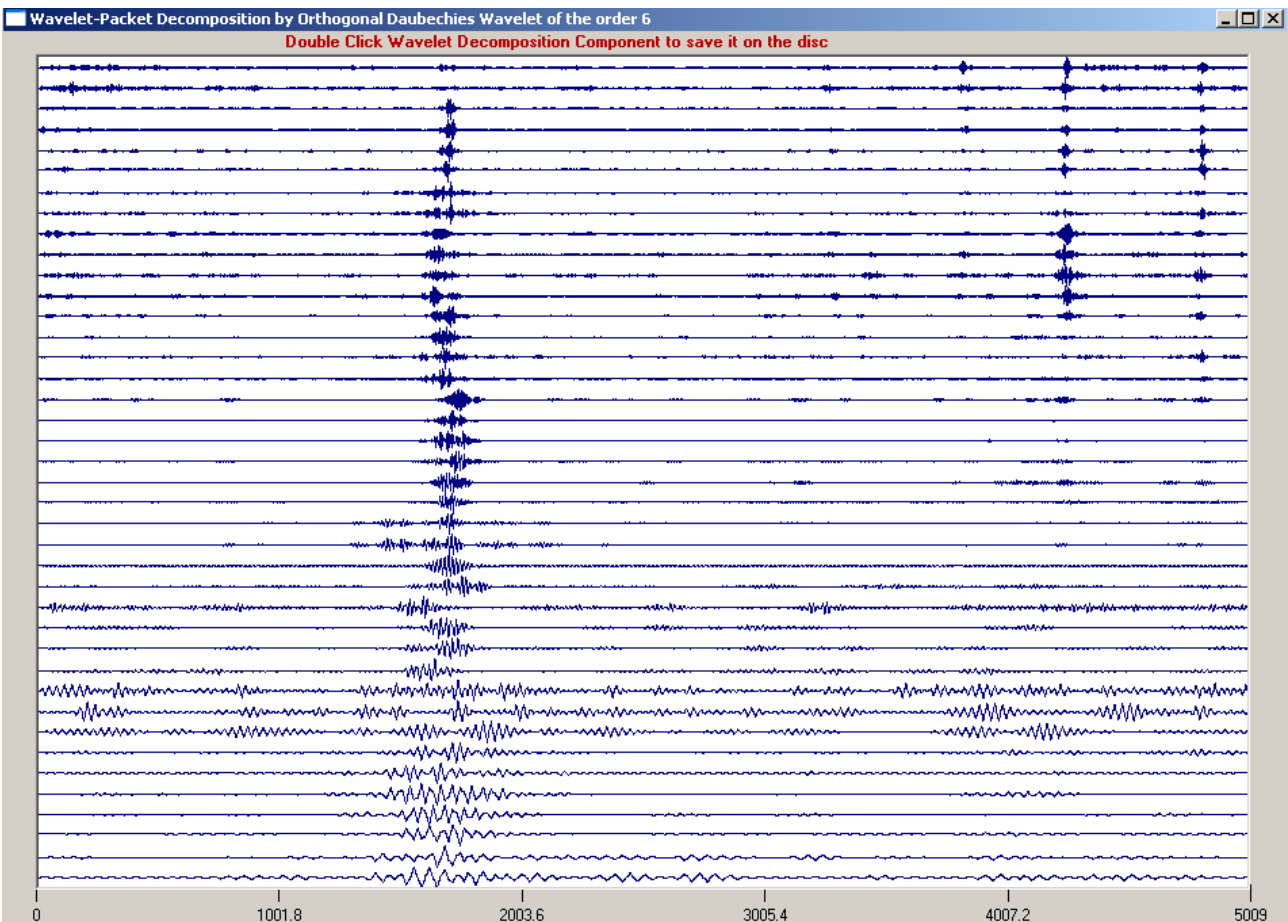


Рис.28.

Отметим, что ортогональный вейвлет определяется здесь автоматически. При этом программа выводит вейвлет-пакетный спектр мощности и форму базисной функции используемого вейвлета:

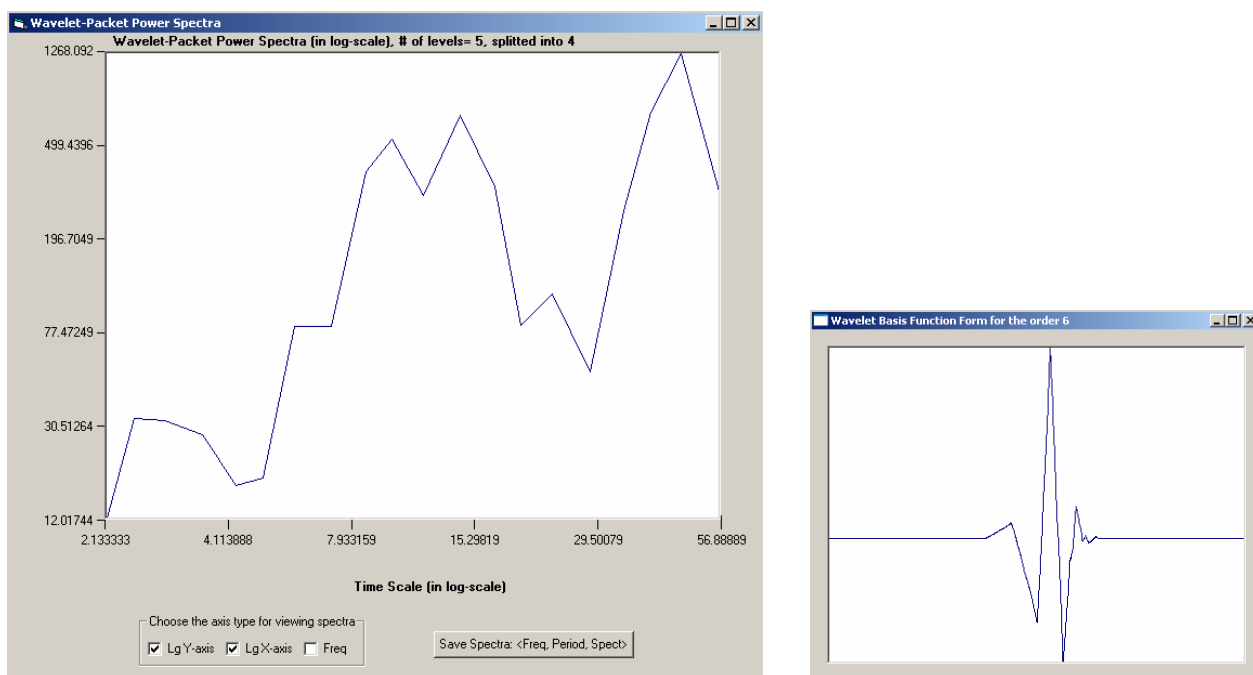


Рис.29.

Можно выделить главный импульс этого сигнала в качестве фрагмента:

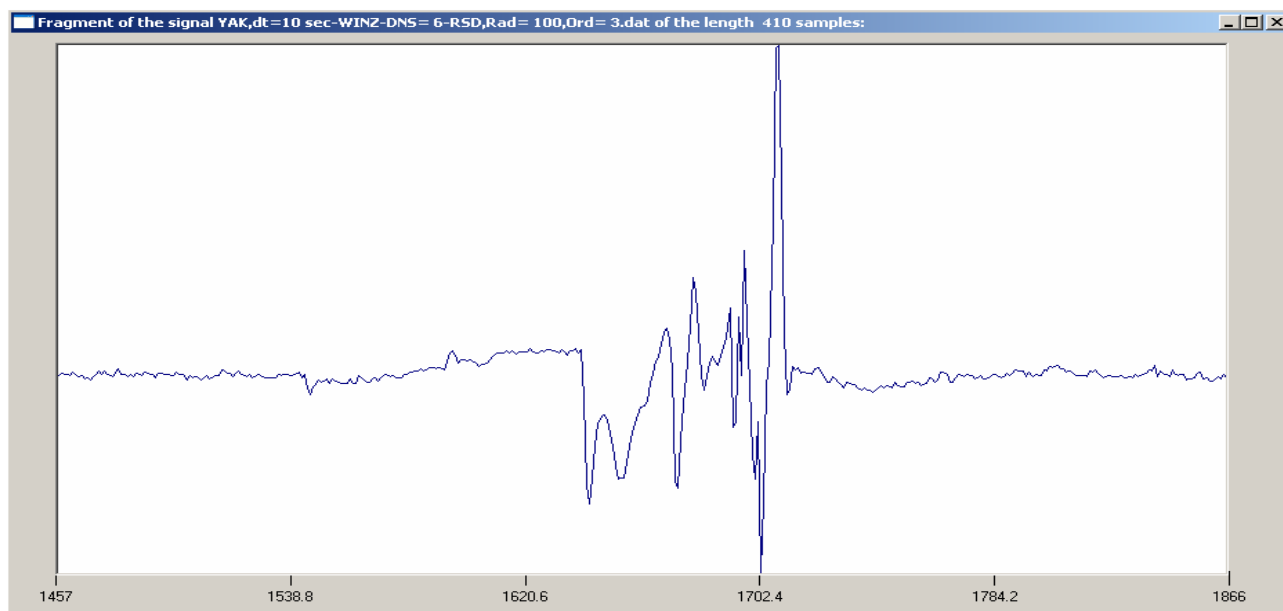


Рис.30.

и посмотреть подробно его Морле-диаграмму:

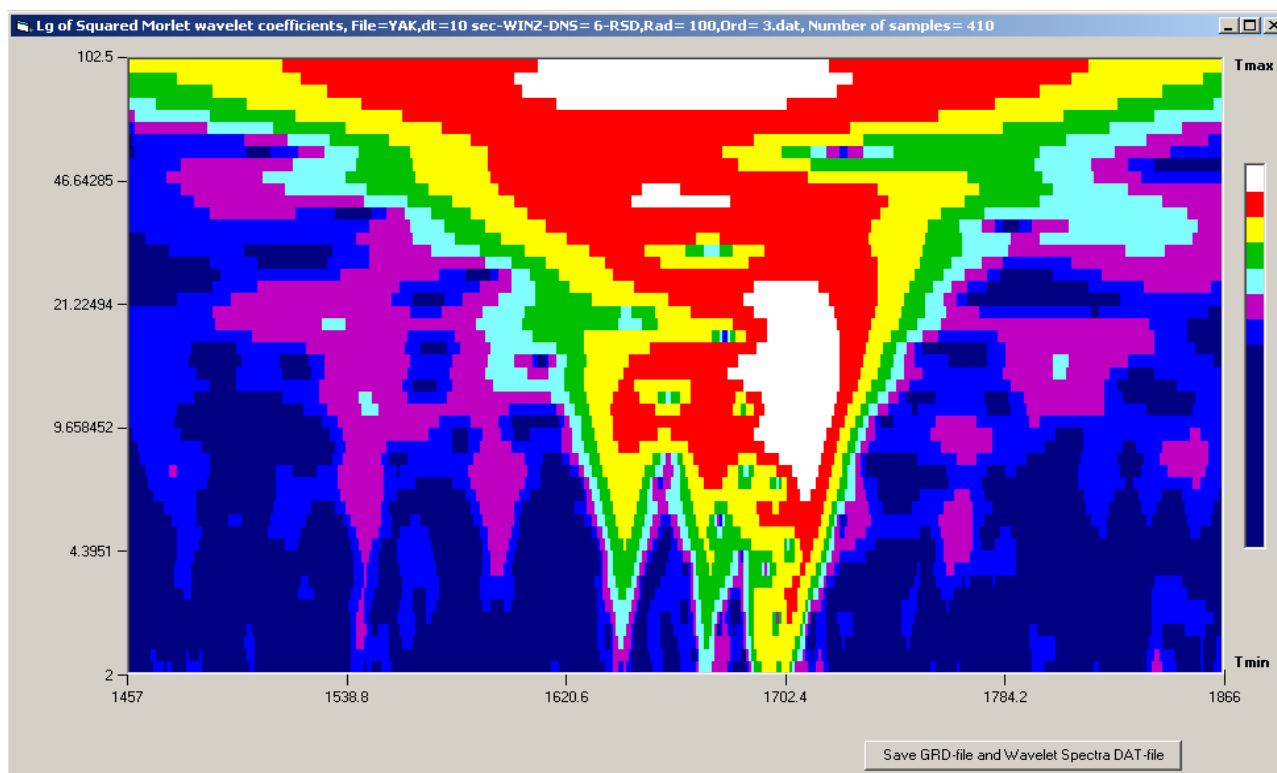


Рис.31.

и структуру длинных цепей скелетов модулей вейвлет-преобразований с нулевой, первой и второй производной от гауссиана:

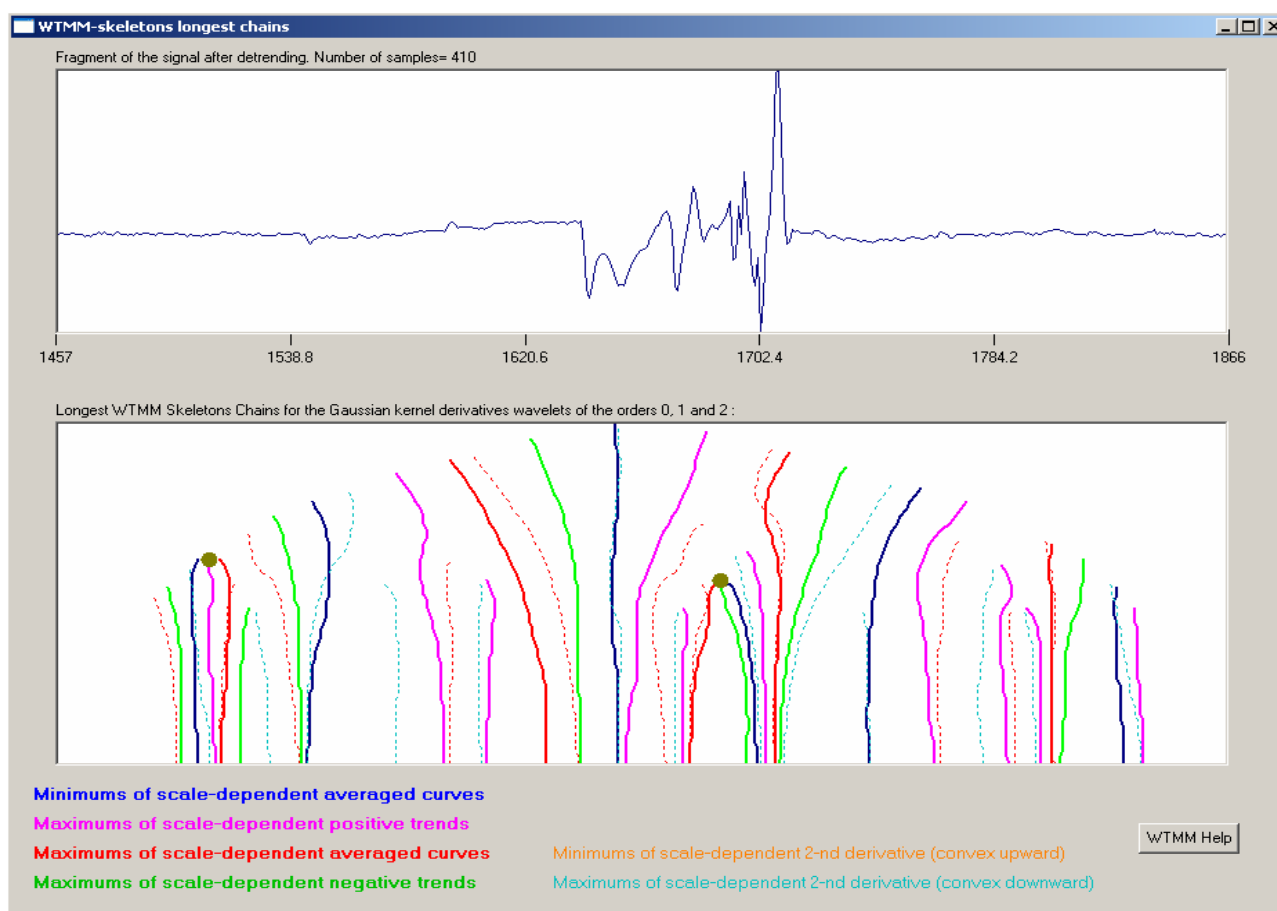


Рис.32.

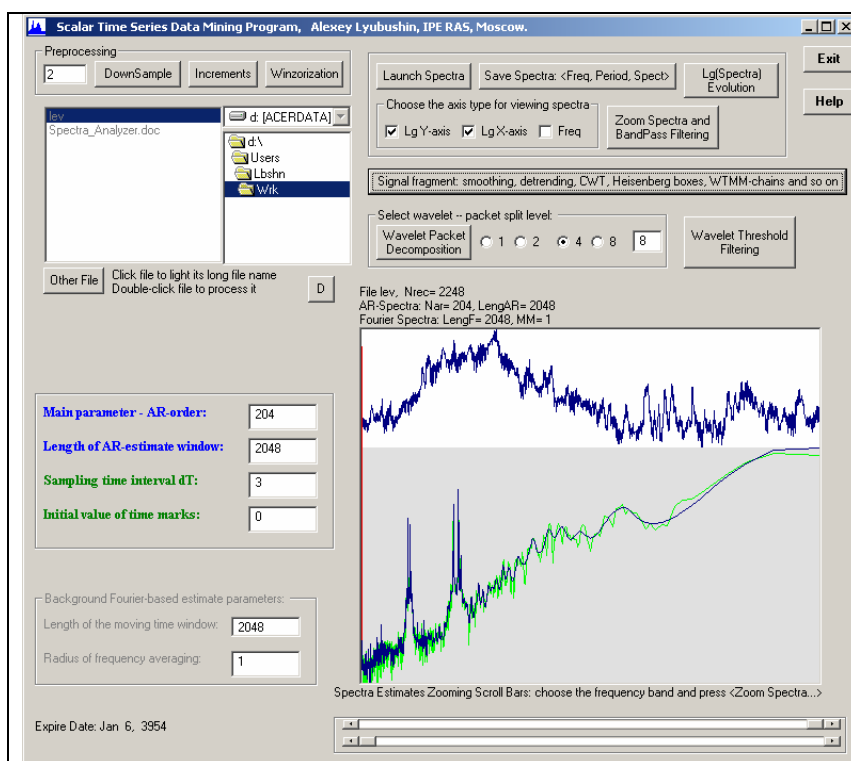


Рис.33.

Для иллюстрации оценки эволюции логарифма спектра мощности в скользящем временном окне лучше взять сигнал содержащий выраженные гармонические компоненты, например, уровень подземных вод при 3- часовом опросе



Его СВАН-диаграмма с выбранными по умолчанию параметрами:

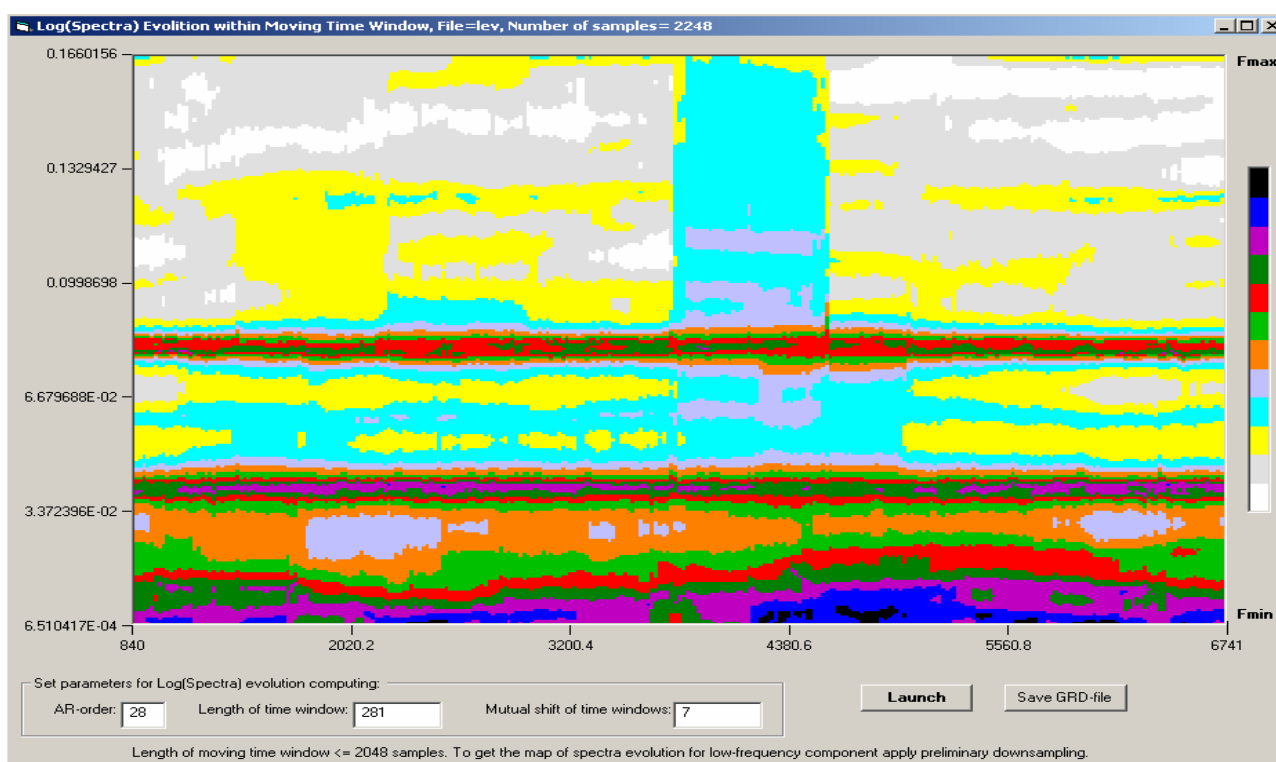


Рис.34.

Следующая СВАН-диаграмма приведена для очень короткого временного окна:

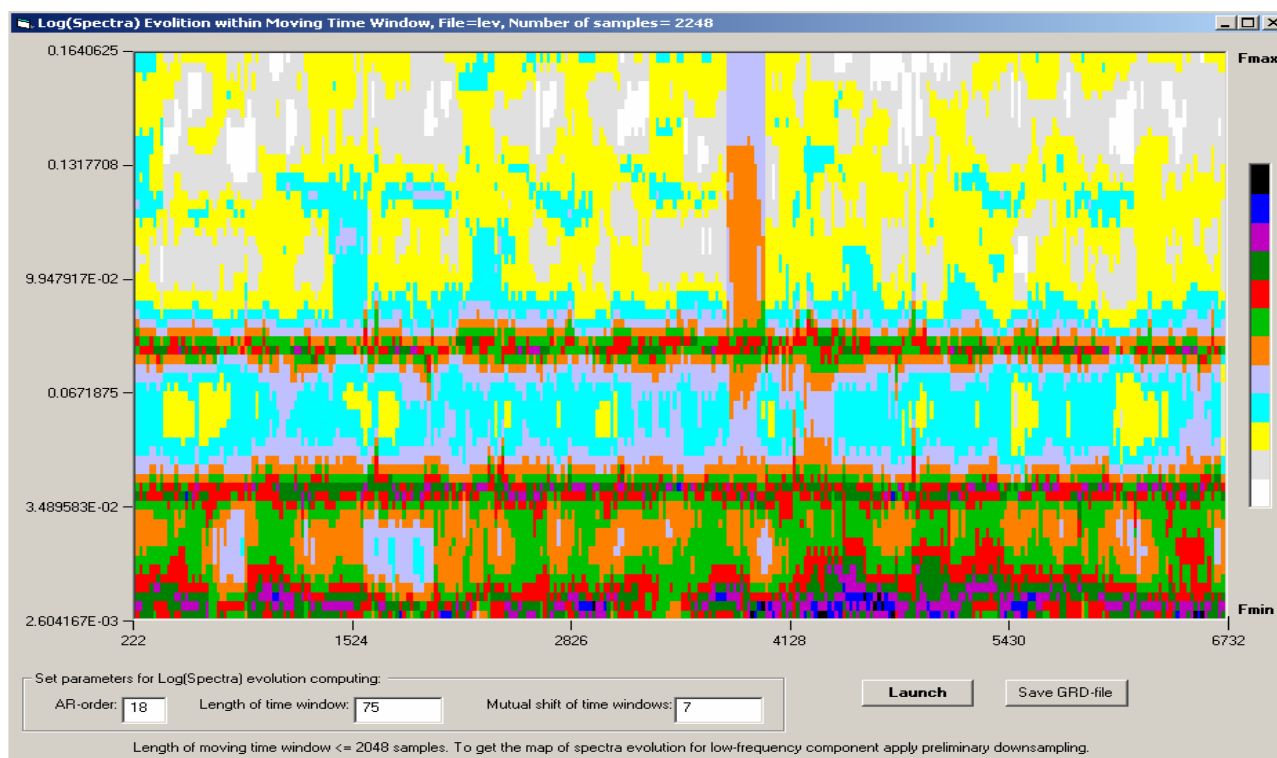


Рис.35.

Для сравнения – ее Морле-диаграмма:

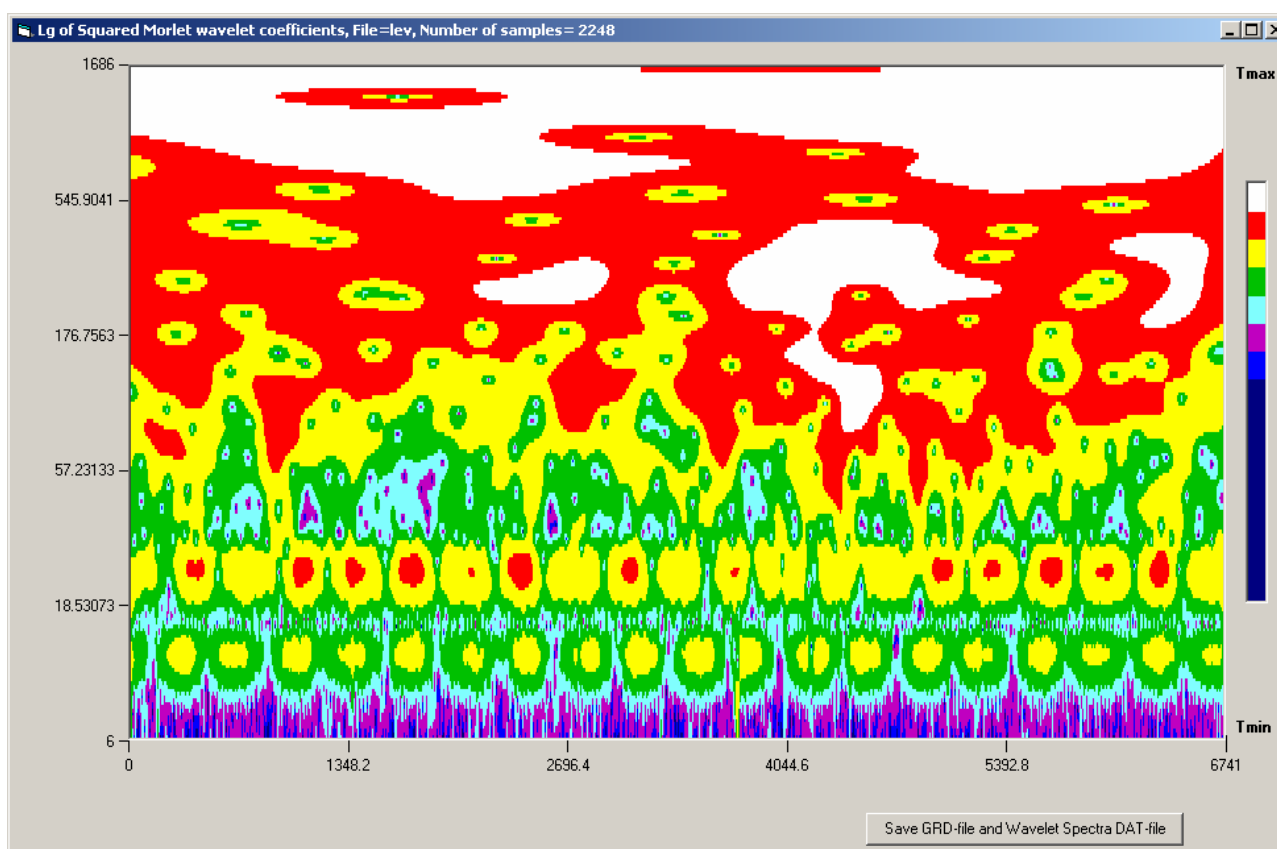


Рис.36.

Наконец, приведем примеры выделения низкочастотной гармоника с неизвестным периодом для временного ряда глобальной температурной аномалии:

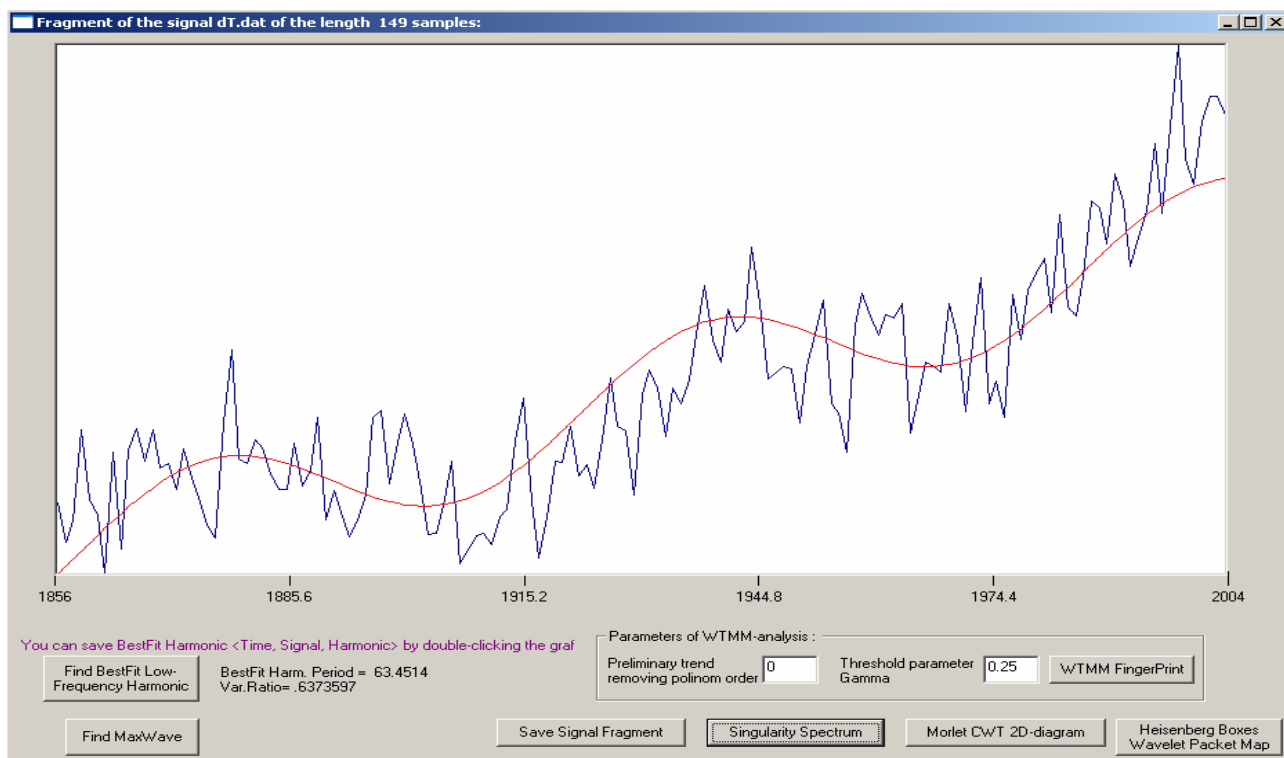


Рис.37.

и автоматического определения двух экстремальных точек, характеризующих максимальный всплеск сейсмической записи.

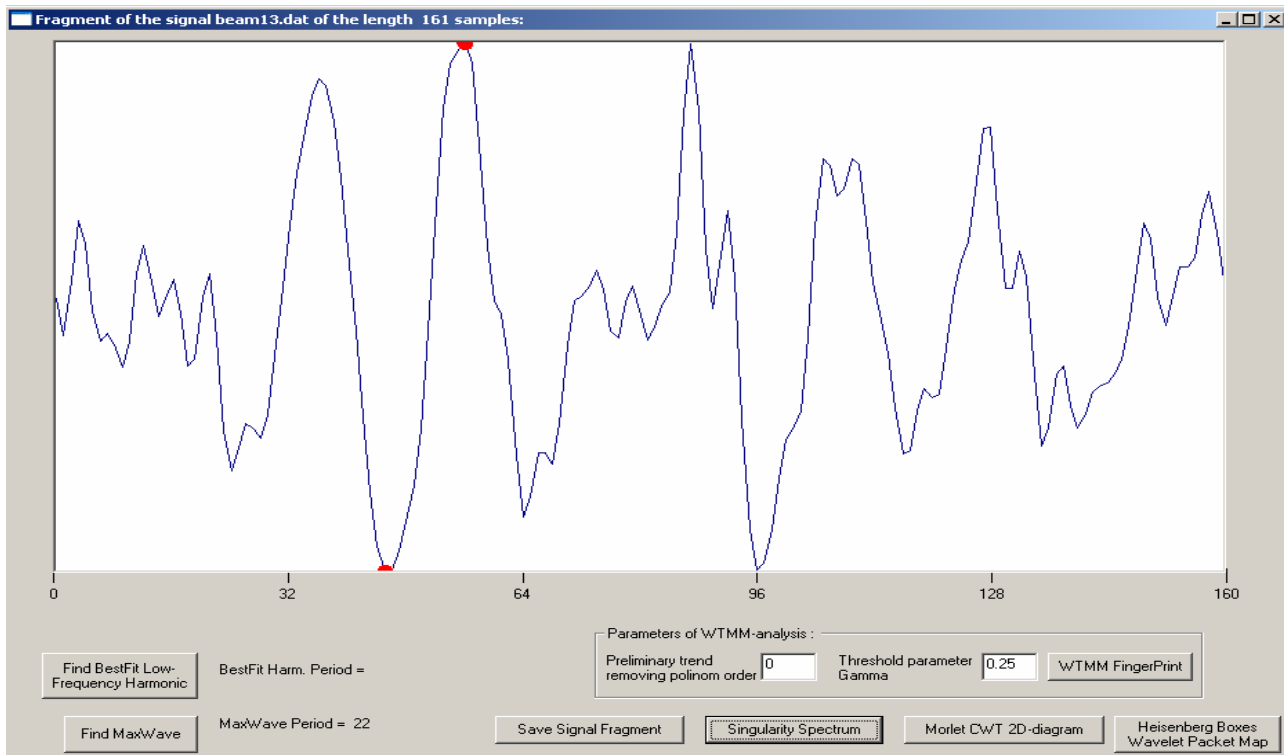


Рис.38.

Для иллюстрации вычисления мультифрактального спектра сингулярности возьмем временной ряд электротеллурических потенциалов, измеренных на Камчатке после их

приведения (путем усреднения и прореживания) к интервалу дискретизации 1 сутки [Любушин, Копылова, 2004]:

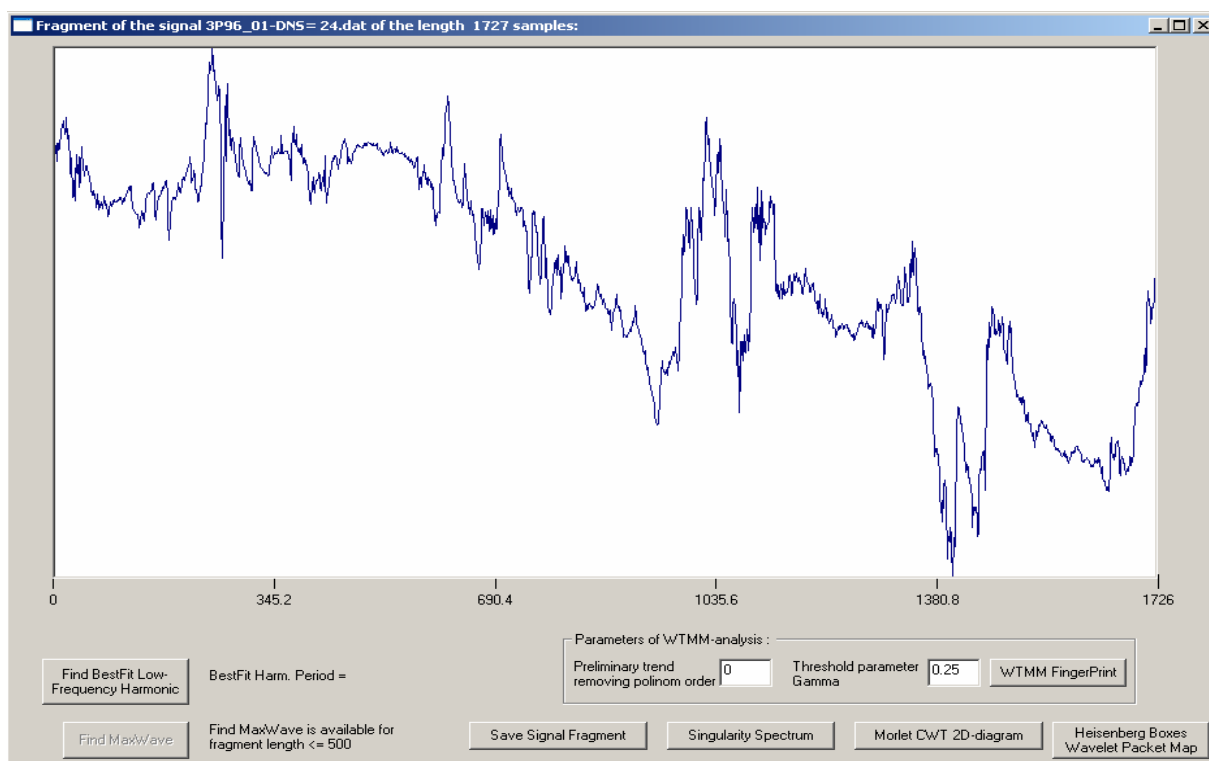


Рис.39. Здесь представлена вся выборка. Вычислим ее спектр сингулярности:

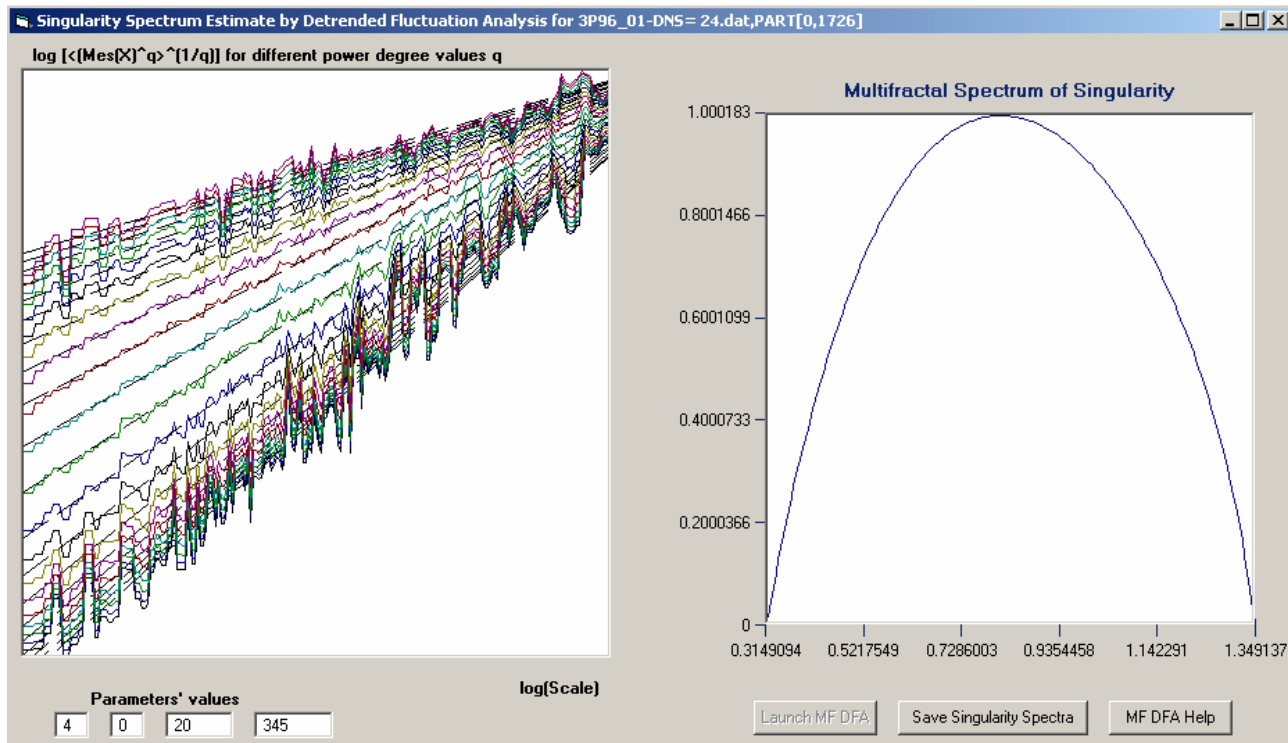


Рис.40.

Внутри левого графического окна на рис.40 представлены графики зависимостей $\ln(Z^{(m)}(q,s))$ от $\ln(s)$ (формулы (51a) или (51b) – логарифмов среднего значения масштабно-

зависимых мер вариативности сигнала в степени q и последующего возведения результатов усреднения в степень $1/q$, после исключения локальных масштабно-зависимых трендов ортогональными полиномами порядка m , в зависимости от логарифмов масштаба) для различных значений показателя степени q , изменяющегося от -10 до +10. Коэффициенты наклона линейных регрессий, подогнанных к этим зависимостям (штриховые линии), дают значения обобщенных показателей Херста $h(q)$. Если сигнал является монофракталом, то прямые линии наилучшего приближения будут примерно параллельны друг другу – это будет означать, что $h(q) = H = const$.

Ниже левого графического окна на рис.40 расположены четыре текстовых окна, которые служат для ввода параметров метода вычисления спектра сингулярности. Смысл текстовых окон становится ясным из подсказки, которая возникает «на кончике» указателя мыши, после его введения в окно.

Самое левое (первое по счету слева направо) окно служит для ввода порядка m ортогонального полинома для удаления масштабно-зависимых трендов. Допустимые значения: $0 \leq m \leq 10$, значение по умолчанию: $m = 4$.

Второе текстовое окно служит для ввода типа используемой меры вариативности сигнала для вычисления $Z^{(m)}(q, s)$ согласно формулам (51a) или (51b). Возможные значения равны “0” или “1”. Если “0”, то мера равна разнице между максимальным и минимальным значениями на интервале длиной s после исключения локального тренда (формула (7.7(a))). Если “1”, то в качестве меры используется стандартное отклонение (формула (7.7(b))). Значение по умолчанию равно “0”.

Следующие 3-е и 4-е окна служат для введения минимального и максимальных значений s_{\min} и s_{\max} возможных масштабов (в числе отсчетов) для определения функции $h(q)$ как коэффициента линейной регрессии между значениями $\ln(Z^{(m)}(q, s))$ и $\ln(s)$: $Z^{(m)}(q, s) \sim s^{h(q)}$, $s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$. По умолчанию для s_{\min} используется значение 20. Для s_{\max} значение по умолчанию равно $L/5$, где L есть число отсчетов в выделенном фрагменте сигнала. На значения s_{\max} наложены ограничения $40 \leq s_{\max} \leq L/5$, а на s_{\min} : $20 \leq s_{\min} \leq s_{\max}/2$.

Правое графическое окно на рис.40 представляет график оценки спектра сингулярности, которая может быть сохранена на диске с именем файла ‘F(Alfa)_.dat’ в поддиректории ‘SpectEstimates’ той директории, где находится файл анализируемого сигнала.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ.

П1. Анализ скрытых периодичностей в последовательности событий.

Метод был предложен в работе [Любушин и др., 1998]. Пусть

$$t_i, i = 1, \dots, N \quad (1)$$

– времена последовательности событий, наблюдаемых на интервале $(0, T]$. Рассмотрим следующую модель интенсивности, содержащую периодическую компоненту:

$$\lambda(t) = \mu \cdot (1 + a \cos(\omega t + \varphi)) \quad (2)$$

где частота ω , амплитуда $a, 0 \leq a \leq 1$, фазовый угол $\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$ и множитель $\mu > 0$ (описывающий пуассоновскую часть интенсивности) являются параметрами модели. Таким образом, пуассоновская часть интенсивности модулируется гармоническим колебанием.

Зафиксируем какое-то значение частоты ω . Логарифмическая функция правдоподобия [Cox, Lewis, 1966] в этом случае для серии наблюдаемых событий равна:

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, a, \varphi | \omega) &= \sum_{t_i} \ln(\lambda(t_i)) - \int_0^T \lambda(u) du = \\ &= N \ln(\mu) + \sum_{t_i} \ln(1 + a \cos(\omega t_i + \varphi)) - \mu T - \frac{\mu a}{\omega} [\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)] \end{aligned} \quad (3)$$

Взяв максимум выражения (3) по отношению к параметру μ нетрудно найти что:

$$\mu = \hat{\mu}(a, \varphi | \omega) = \frac{N}{T + a(\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)) / \omega} \quad (4)$$

Подставляя (4) в формулу (3) получаем

$$\ln(L(\hat{\mu}, a, \varphi | \omega)) = \sum_{t_i} \ln(1 + a \cos(\omega t_i + \varphi)) + N \cdot \ln(\hat{\mu}(a, \varphi | \omega)) - N \quad (5)$$

Следует заметить, что выражение $\hat{\mu}(a = 0, \varphi | \omega) \equiv \hat{\mu}_0 = N / T$ является оценкой интенсивности процесса при условии, что он является однородным пуассоновским (чисто случайным).

Таким образом, приращение логарифмической функции правдоподобия вследствие рассмотрения более богатой, чем для чисто случайного потока событий, модели интенсивности с гармонической компонентой с заданной частотой ω равно:

$$\Delta \ln L(a, \varphi | \omega) = \sum_{t_i} \ln(1 + a \cos(\omega t_i + \varphi)) + N \cdot \ln(\hat{\mu}(a, \varphi | \omega) / \hat{\mu}_0) \quad (6)$$

Пусть

$$R(\omega) = \max_{a, \varphi} \Delta \ln L(a, \varphi | \omega), \quad 0 \leq a \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi] \quad (7)$$

Функция (7) может рассматриваться как обобщение спектра для последовательности событий. График этой функции показывает насколько «более выгодна» периодическая модель интенсивности по сравнению с чисто случайной моделью. Максимальные значения функции (7) выделяют частоты, присутствующие в потоке событий.

Следующим очевидным обобщением метода является вычисление функции (7), используя наблюдаемые моменты времени не на всем интервале $(0, T]$, но внутри скользящего временного окна заданной длины L . Пусть τ – время правого конца скользящего временного окна. Тогда выражение (7) становится функцией от 2-х аргументов: $R(\omega, \tau | L)$, которая может быть визуализирована в виде 2-мерных карт или 3-мерных рельефов на плоскости аргументов (ω, τ) . Эта частотно-временная диаграмма позволяет исследовать динамику возникновения и развития периодических компонент внутри исследуемого потока событий [Любушин, 2002(б); Соболев, 2003, 2004; Соболев и др., 2005; Любушин, 2007].

Важным вопросом применения этого метода к реальным данным является выяснение статистической значимости полученных пиковых значений статистик $R(\omega)$ или $R(\omega, \tau | L)$. Для его решения можно применить два подхода. Первый состоит в применении классической асимптотической теории Уилкса [Raо, 1965]. Пусть для одного и того же набора данных $X^{(N)}$, состоящего из N независимых наблюдений, рассматриваются 2 гипотезы:

- 1) гипотеза H_0 : $X^{(N)}$ распределена в соответствии с плотностью $p_0(X^{(N)} | \theta_0)$;
- 2) гипотеза H_1 : $X^{(N)}$ распределена в соответствии с плотностью $p_1(X^{(N)} | \theta_1)$.

где θ_0 и θ_1 – векторы неизвестных параметров, имеющих размерности m_0 и m_1 , причем гипотеза H_1 является более «богатой»: $m_1 > m_0$, а вектор параметров θ_1 полностью включает в себя компоненты вектора θ_0 . Рассмотрим разницу между логарифмами правдоподобий для этих двух гипотез, при условии, что для векторов параметров взяты их оценки метода максимального правдоподобия:

$$\Delta \ln L(X^{(N)}) = \ln \left(\max_{\theta_1} p_1(X^{(N)} | \theta_1) \right) - \ln \left(\max_{\theta_0} p_0(X^{(N)} | \theta_0) \right) \quad (8)$$

Очевидно, что $\Delta \ln L(X^{(N)}) \geq 0$. Согласно теореме Уилкса, при условии справедливости гипотезы H_0 величина (8) имеет асимптотическое распределение:

$$\Delta \ln L(X^{(N)}) \sim \frac{\chi_m^2}{2}, \quad m = m_1 - m_0, \quad N \rightarrow \infty \quad (9)$$

В нашем случае $m = 2$ и, следовательно, удвоенная величина (7) имеет асимптотическую плотность распределения χ_2^2 , равную $e^{-x/2}/2$, а сама величина (7) распределена асимптотически с экспоненциальной плотностью e^{-x} или

$$\Pr\{R(\omega) < x\} = 1 - e^{-x}, \quad N \rightarrow \infty \quad (10)$$

при условии, что анализируемая последовательность моментов времени распределена согласно пуассоновскому закону с постоянной интенсивностью.

Недостатком этого подхода является его асимптотический характер. Следовательно, область его применимости ограничивается в основном «статическими» оценками, когда периодические компоненты ищутся с использованием информации от всей выборки и эта выборка содержит «достаточно большое» число событий. Если же вычисляется «динамическая» оценка в скользящем временном окне, то число событий варьируется от окна к окну и может достигать лишь нескольких десятков, что ставит вопрос о применимости формулы (10). В этом случае более надежным является подход, основанный на статистическом моделировании. Именно, вычисляется оценка средней интенсивности точечного процесса по формуле $\hat{\mu}_0 = N/T$ и генерируется длинная выборка моментов времени, интервалы между которыми распределены по закону Пуассона с интенсивностью $\hat{\mu}_0$. Для этого последовательно вызывается датчик псевдослучайных чисел ξ , равномерно распределенных на $[0,1]$ и для каждого значения ξ_j находится длина интервала Δt_j до следующего события по формуле:

$$\Delta t_j = \ln(1 - \xi_j) / \hat{\mu}_0, \quad t_j = t_{j-1} + \Delta t_j, \quad t_0 = 0 \quad (11)$$

Формула (11) применяется многократно для независимых реализаций псевдослучайных чисел ξ_j и генерируются моменты времени t_j . Общее число таких искусственных моментов времени определяется из условия, чтобы их было «много больше» реального числа наблюдений, например, $10^2 N \div 10^3 N$. Далее к этой выборке применяется метод вычисления $R(\omega, \tau | L)$ с той же длиной окна L , что и для реальных данных, но при смещении окон, равных длине окна (чтобы получить независимые значения (7) для не перекрывающихся окон), и рассматриваются полученные результаты. Пиковые значения $R(\omega, \tau | L)$ на искусственных данных дают пороги статистической значимости максимумов статистики (7). Для формализации этого подхода можно построить эмпирическую функцию распределения значений $R(\omega, \tau | L)$ для заданной частоты (или периода) на искусственных моментах времени и задать уровень значимости как квантиль этого распределения с соответствующей доверительной вероятностью.

П2. Вейвлет-анализ временных рядов.

Вейвлет-анализ геофизических временных рядов в последнее время становится все более популярным средством обработки наблюдений [Любушин, 2000, 2001, 2002(а); Любушин и др., 2004; Любушин, Копылова, 2004; Любушин, 2007].

Ортогональный кратно-разрешающий анализ (вейвлет-разложение) сигнала $x(s)$ от непрерывного аргумента s определяется формулой [Daubechies, 1992; Mallat, 1998]:

$$x(s) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x^{(\alpha)}(s), \quad x^{(\alpha)}(s) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b^{(\alpha)}(\tau_j^{(\alpha)}) \psi^{(\alpha)}(s - \tau_j^{(\alpha)}), \quad \tau_j^{(\alpha)} = j \cdot 2^\alpha \quad (12)$$

Здесь α является номером уровня детальности,

$$b_j^{(\alpha)} = b^{(\alpha)}(\tau_j^{(\alpha)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \psi^{(\alpha)}(s - \tau_j^{(\alpha)}) ds \quad (13)$$

– вейвлет-коэффициенты на α -ом уровне детальности, соответствующие моменту времени $\tau_j^{(\alpha)}$, $\psi^{(\alpha)}(s)$ являются базисными функциями α -ого уровня, которые получаются путем растяжения и переноса основной вейвлет-функции $\Psi(s)$:

$$\psi^{(\alpha)}(s) = (\sqrt{2})^{-\alpha} \cdot \Psi(2^{-\alpha} \cdot s), \quad \psi^{(\alpha)}(s - \tau_j^{(\alpha)}) = (\sqrt{2})^{-\alpha} \cdot \Psi(2^{-\alpha} \cdot s - j) \quad (14)$$

Функция $\Psi(s)$ конструируется таким образом, чтобы она была финитной, имела единичную среднеквадратичную норму и бесконечное множество функций $\{\psi^{(\alpha)}(s - \tau_j^{(\alpha)})\}$, – сдвинутых в точки $\tau_j^{(\alpha)}$ и растянутых (или сжатых) в 2^α раз копий основной функции, образовывали бы *ортонормальный базис* в $L_2(-\infty, +\infty)$. Например, если:

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= -1 \text{ для } s \in (0, \frac{1}{2}] \\ &+1 \text{ для } s \in (\frac{1}{2}, 1] \text{ и ноль для прочих } t, \end{aligned} \quad (15)$$

тогда формула (12) соответствует разложению функции $x(s)$ по вейвлетам Хаара. Функция (15) является простейшим и наиболее компактным ортогональным финитным вейвлетом. Наиболее популярным семейством ортогональных вейвлет-функций являются функции Добеши (Daubechies) $\Psi(s) = D_{2p}(s)$ порядка $2p$, которые обладают следующими свойствами:

$$D_{2p}(s) = 0 \text{ вне интервала } [-p+1, p], \quad (16a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^k \cdot D_{2p}(s) ds = 0 \quad \text{для } k = 0, \dots, (p-1) \quad (16b)$$

С ростом числа p обнуляемых моментов в формуле (16b) функция $D_{2p}(s)$ становится все более гладкой, хотя число ее непрерывных производных не является пропорциональным параметру p . Например, функция Добеши 4-го порядка $D_{2p}(s)$ обнуляет нулевой и первый момент и непрерывно дифференцируема во всех точках, за исключением счетного множества точек вида $k2^{-l}$ для целых чисел k, l . В точках такого вида $D_4(s)$ имеет левостороннюю производную, но не имеет правосторонней. Отметим, что вейвлет Хаара (15) является вейвлетом Добеши 2-го порядка ($p = 1$). Мы использовали словарь из 17 вейвлетов: 10 обычных ортогональных вейвлетов Добеши с порядками от 2 до 20 (использование более высоких порядков сопряжено с численной неустойчивостью) и 7 т.н. «симлетов» – модификаций вейвлетов Добеши, в которых форма базисных функций является более симметричной, чем для обычных вейвлетов [Chui, 1992; Daubechies, 1992; Mallat, 1998]. Симлеты обладают теми же свойствами компактности, ортогональности, полноты и гладкости, что и вейвлеты (16), но для порядков от 2-го до 6-го они совпадают с обычным ортогональным базисом Добеши, а затем, для порядков от 8-го до 20-го, появляются различия в форме базисной функции.

Рассмотрим ситуацию, когда $z(t)$ представляет собой сигнал с дискретным временем t длиной N отсчетов, $t = 1, \dots, N$. Будем считать, что N имеет вид целого числа вида 2^m – это удобно для последующего использования быстрого вейвлет-преобразования. Если N не

равно 2^m , то дополним сигнал $z(t)$ нулями до длины, которая будет равна 2^m , где m – минимальное целое число, для которого $N \leq 2^m$. Формула кратно-разрешающего анализа в случае конечной выборки и дискретного времени:

$$z(t) = a_1^{(m)} + \sum_{\beta=1}^m z^{(\beta)}(t), \quad z^{(\beta)}(t) = \sum_{j=1}^{2^{(m-\beta)}} c_j^{(\beta)}(\tau_j^{(\beta)}) \cdot \psi^{(\beta)}(t - \tau_j^{(\beta)}), \quad \tau_j^{(\beta)} = j \cdot 2^\beta \quad (17)$$

где $z^{(\beta)}(t)$ является компонентой сигнала, принадлежащей уровню детальности с номером β , $a_1^{(m)}$ – константа, пропорциональная среднему значению выборки [Chui, 1992, Daubechies, 1992; Mallat, 1998; Press et al., 1996]. В формуле (17) коэффициенты $c_j^{(\beta)} = c^{(\beta)}(\tau_j^{(\beta)})$ могут быть представлены, подобно формуле (13), в виде свертки базисной функции $\psi^{(\beta)}(s)$ от непрерывного аргумента s с некоторым сигналом $\tilde{z}(s)$:

$$c_j^{(\beta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z}(s) \cdot \psi^{(\beta)}(s - \tau_j^{(\beta)}) ds \quad (18)$$

Сигнал $\tilde{z}(s)$ от непрерывного аргумента s получается из сигнала $z(t)$ с дискретным временем t путем интерполяции по формуле:

$$\tilde{z}(s) = \sum_t z(t) \cdot \Phi(s - t) \quad (19)$$

где функция $\Phi(s)$ носит название масштабирующей функции вейвлет-разложения. Например, для вейвлета Хаара $\Phi(s) = 1$ для $s \in [0, 1]$ и $\Phi(s) = 0$ для всех прочих s и, следовательно, интерполированный сигнал будет кусочно-постоянной функцией. В общем случае вейвлетов Добеши масштабирующая функция является ортогональной основной базисной функции $\Psi(s)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(s) \Phi(s) ds = 0$ и имеет те же свойства гладкости и компактный носитель той же длины, что и $\Psi(s)$ (но не совпадающий полностью с ним): $\Phi(s) = 0$ вне интервала $[0, 2p - 1]$.

Если дискретный сигнал $z(t)$ получается из сигнала с непрерывным временем $x(s)$ путем взятия отсчетов с шагом Δs по времени, то при стремлении $\Delta s \rightarrow 0$ интерполированный сигнал $\tilde{z}(s)$ всегда стремится в среднеквадратической метрике к исходному $x(s)$. Если в формуле (19) используется масштабирующая функция $\Phi(s)$, соответствующая базису Добеши порядка $2p$, то интерполированный сигнал $\tilde{z}(s)$ будет иметь $(p - 1)$ первых производных, непрерывных почти всюду, за исключением, возможно, счетного числа точек, независимо от гладкости исходного сигнала $x(s)$. Но при стремлении $\Delta s \rightarrow 0$ эти производные будут стремиться в интегральной метрике к производным исходного сигнала лишь в том случае, если $x(s)$ будет также $(p - 1)$ раз дифференцируем почти всюду. Таким образом, выбор вейвлета для анализа сигнала должен соответствовать его гладкости.

Если забыть о возможном происхождении сигнала $z(t)$ в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(s)$ с некоторым шагом по времени Δs , то коэффициенты $c_j^{(\beta)}$

дискретного разложения (17) являются результатом применения последовательной линейной фильтрации дискретного сигнала. На первом шаге происходит разделение дискретного сигнала на 2 части: вейвлет-коэффициенты 1-го уровня детальности $c_j^{(1)}$ (или «детальный сигнал» 1-го уровня) и т.н. аппроксимирующий (сглаженный) сигнал $a_j^{(1)}$ 1-го уровня по формуле:

$$c_j^{(1)} = \sum_t g(t-2j) \cdot a_t^{(0)}, \quad a_j^{(1)} = \sum_t h(t-2j) \cdot a_t^{(0)}, \quad a_t^{(0)} \equiv z(t), \quad j=1, \dots, N/2 \quad (20)$$

Коэффициенты линейного фильтра $g(k)$ в формуле (20) обладают свойством выделения высоких частот, а коэффициенты $h(k)$ – свойством сглаживания. Отметим, что формулы (20) включают в себя не только линейную фильтрацию, но и прореживание в 2 раза – поэтому детальный и аппроксимирующий сигналы содержат в 2 раза меньше отсчетов, чем исходный. Из-за конечной длины выборки при применении формул (20) возникают технические сложности в начале и в конце выборки. Существуют различные приемы преодоления этих трудностей, например, рассмотрение выборки $z(t)$ на кольце вместо интервала. При этом могут возникать краевые искажения результатов вейвлетной фильтрации, аналогичные краевым искажениям из-за циклического эффекта дискретного преобразования Фурье [Press et al., 1996]. После первого шага (20) он повторяется еще $(m-1)$ раз (напомним что $N = 2^m$):

$$c_j^{(\beta+1)} = \sum_t g(t-2j) \cdot a_t^{(\beta)}, \quad a_j^{(\beta+1)} = \sum_t h(t-2j) \cdot a_t^{(\beta)}, \quad j=1, \dots, N \cdot 2^{-(\beta+1)} \quad (21)$$

Таким образом, согласно формуле (21), на каждом новом уровне детальности вейвлет-разложения происходит однотипное расщепление аппроксимирующего сигнала $a_j^{(\beta)}$ предыдущего уровня детальности на его высокочастотную составляющую $c_j^{(\beta+1)}$ и на «еще более сглаженный» сигнал $a_j^{(\beta+1)}$. Число отсчетов в детальном сигнале (то есть число вейвлет-коэффициентов) и в сглаженном (аппроксимирующем) сигнале всякий раз уменьшается в 2 раза при увеличении номера уровня детальности на единицу. Коэффициент $a_1^{(m)}$ в формуле (1.6) является аппроксимирующим «сигналом», соответствующим самому глубокому сглаживанию на последнем уровне детальности m . Коэффициенты $g(k)$ и $h(k)$ линейных фильтров (имеющих название «сопряженных зеркальных фильтров») связаны друг с другом соотношением $g(k) = (-1)^{1-k} h(1-k)$, которое вытекает из масштабирующих уравнений ортогонального кратно-разрешающего анализа:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Phi(t/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot \Phi(t-k), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi(t/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot \Phi(t-k) \quad (22)$$

для масштабирующей и основной базисной функций. Для финитных базисных функций Добеши $D_{2p}(s)$ число ненулевых коэффициентов в линейных зеркальных фильтрах $g(k)$ и $h(k)$ равно порядку функции $2p$. Например, для вейвлета Хаара $h(k) = 1/\sqrt{2}$ для $k = 0, 1$ и $h(k) = 0$ для всех прочих k . Для функций Добеши 4-го и 6-го порядков коэффициенты зеркальных фильтров находятся аналитически из линейных уравнений, вытекающих из условия (16) обнуления заданного числа первых моментов, но для более высоких порядков эти линейные уравнения решаются уже численно. Следует заметить, что с ростом порядка вейвлета обусловленность линейных уравнений уменьшается и растет ошибка округления. Поэтому обычно ограничиваются вейвлетами до 20-го порядка.

Алгоритмически вейвлет-преобразование является линейным ортогональным преобразованием N -мерного вектора выборки $z(t)$ в вектор коэффициентов $C_z^{(N)} = (a_1^{(m)}, c_1^{(m)}, \dots, (c_j^{(\beta)}, j=1, \dots, n_\beta), \dots)$, длина которого также равна N и который состоит из постоянной $a_1^{(m)}$ на первом месте и последовательно состыкованных друг с другом коэффициентов всех уровней детальности, начиная с m -го, $(m-1)$ -го и так далее, вплоть до коэффициентов первого уровня детальности, занимающего всю вторую половину вектора $C_z^{(N)}$ [Press et al., 1996]. Обратное преобразование вектора $C_z^{(N)}$ дает исходную выборку $z(t)$. Заметим, что обратное вейвлет-преобразование осуществляется также в виде последовательных шагов восстановления аппроксимирующего сигнала уровня β из вейвлет-коэффициентов $c_k^{(\beta+1)}$ и аппроксимирующего сигнала $a_k^{(\beta+1)}$ уровня $(\beta+1)$ с использованием зеркальных сопряженных фильтров по формуле:

$$a_j^{(\beta)} = \sum_k h(j-2k) \cdot a_k^{(\beta+1)} + \sum_k g(j-2k) \cdot c_k^{(\beta+1)}, \quad j=1, \dots, N \cdot 2^{-\beta} \quad (23)$$

Обратное преобразование начинается с коэффициентов $a_1^{(m)}$ и $c_1^{(m)}$ последнего (самого низкочастотного) уровня детальности с номером m и заканчивается на 1-ом уровне. При этом происходит увеличение в 2 раза числа отсчетов в аппроксимирующем сигнале каждый раз при уменьшении номера уровня детальности – до тех пор, пока последовательность восстановлений не остановится на 1-ом уровне детальности и число отсчетов не станет равным N . Прямое и обратное вейвлет-преобразования (21) и (23) допускают программную реализацию в виде быстрых алгоритмов, требующих $O(N)$ операций, что по скорости превосходит быстрое преобразование Фурье [Chui, 1992; Daubechies, 1992; Mallat, 1998; Press et al., 1996]. Компонента $z^{(\beta)}(t)$ является результатом обратного преобразования вектора коэффициентов типа $C_z^{(N)}$, при условии обнуления всех коэффициентов, кроме соответствующих уровню β .

Компонента $z^{(\beta)}(t)$ для достаточно большого значения N частотно локализована в полосе:

$$[\Omega_{\min}^{(\beta)}, \Omega_{\max}^{(\beta)}] = [1/(2^{(\beta+1)} \Delta s), 1/(2^\beta \Delta s)] \quad (24)$$

где Δs – длина интервала опроса. Значение коэффициента $c_j^{(\beta)}$ отражает поведение сигнала $z(t)$ в окрестности точки $\tau_j^{(\beta)}$ на интервале длиной $p2^\beta$ отсчетов. Следовательно, чем более гладким является вейвлет, тем шире этот интервал. Однако основные вариации (всплески) финитной базисной функции $\psi^{(\beta)}(s)$ всегда сосредоточены на интервале длиной 2^β независимо от параметра гладкости p . Поэтому каждому коэффициенту $c_j^{(\beta)}$ припишем «временную зону ответственности» длиной $\Delta T^{(\beta)} = \Delta s 2^\beta$. Произведение ширины $\Delta \Omega^{(\beta)} = 1/(2^{\beta+1} \Delta s)$ частотной полосы (24) на длину временного интервала $\Delta T^{(\beta)}$ задает площадь так называемых «ящиков Гейзенберга» на плоскости «время-частота», которая равна $1/2$ независимо от рассматриваемого уровня детальности.

Самым мелкомасштабным уровнем детальности в формуле (17) является первый, общее число уровней детальности m зависит от длины выборки. Совокупность значений $c_j^{(\beta)}$ и $a_1^{(m)}$ вычисляются путем прямого быстрого вейвлет-преобразования [Daubechies, 1992; Mallat,

1998; Press et al, 1996]. Они однозначно определяют исходную выборку $z(t)$, которая может быть восстановлена по заданным $c_j^{(\beta)}$ и $a_1^{(m)}$ путем обратного быстрого вейвлет-преобразования. Уровень детальности можно ассоциировать с номером частоты (частотным дискретом) в классическом дискретном Фурье-преобразовании. Отличие вейвлет-разложения состоит в том, что набор “вейвлет-частот” значительно более редок (равномерен в логарифмической шкале), чем в Фурье-анализе. Это является платой за важное свойство – финитность базисных функций, которое отсутствует в Фурье-разложении и которое позволяет гораздо более точно определять местоположения короткоживущих аномалий – всплесков. Кроме того, финитность базисных функций позволяет производить вейвлет-анализ нестационарных и негауссовых временных рядов, Фурье-анализ которых хотя формально и возможен, однако малоэффективен.

Хотя обычное вейвлет-разложение обладает полезными свойствами высокой точности локализации по времени нестационарных сигналов, обратной стороной этого свойства, в соответствии с принципом Гейзенберга, является слабое разрешение по частоте. Вейвлет-пакетное разложение позволяет частично устранить этот недостаток за счет некоторого ухудшения разрешения по времени. Реализация пакетного расщепления основана на иерархической схеме последовательных вейвлет-преобразований исходных коэффициентов $c_j^{(\beta)}$. Ортогональное вейвлет-пакетное разложение сигнала, аналогично формуле (17), может быть записано в виде суммы:

$$z(t) = a_1^{(m)} + \sum_{\beta=m_q+1}^m z^{(\beta)}(t) + \sum_{\beta=1}^{m_q} \sum_{\gamma=1}^q z^{(\beta,\gamma)}(t) \quad (25)$$

Величина q может быть равна 2, 4, 8, ..., то есть имеет вид $q = 2^r, r = 1, 2, 3, \dots$ и определяет число подуровней, на которое расщепляется обычный уровень детальности. Для заданного значения параметра q максимальный номер $m_q < m$ уровня детальности β , который может быть расщеплен, определяется из условия, что он должен содержать минимум q вейвлет-коэффициентов. Компоненты $z^{(\beta,\gamma)}(t)$ частотно-упорядочены, расщепляют частотную полосу (24), соответствующую уровню детальности β на q равных частей. Таким образом, сигнал $z^{(\beta,\gamma)}(t)$ частотно-локализован в полосе:

$$[\Omega_{\min}^{(\beta,\gamma)}, \Omega_{\max}^{(\beta,\gamma)}], \quad \Omega_{\min}^{(\beta,\gamma)} = \Omega_{\min}^{(\beta)} + (\gamma-1) \cdot \Delta\Omega^{(\beta)}, \quad \gamma = 1, \dots, q; \quad (26)$$

$$\Omega_{\max}^{(\beta,\gamma)} = \Omega_{\min}^{(\beta,\gamma)} + \Delta\Omega^{(\beta)}, \quad \Delta\Omega^{(\beta)} = (\Omega_{\max}^{(\beta)} - \Omega_{\min}^{(\beta)}) / q$$

Если уровню детальности с номером β соответствует n_β обычных вейвлет-коэффициентов, то каждому подуровню γ пакетного разложения соответствует n_β / q вейвлет-пакетных коэффициентов $c_j^{(\beta,\gamma)}$, $j = 1, \dots, n_\beta / q$, «ящики Гейзенберга» для которых имеют временную длину в q раз большую, что исходные коэффициенты $c_j^{(\beta)}$, но их частотная сторона в q раз меньше (следовательно, площадь «ящиков Гейзенберга» остается неизменной и равной $1/2$).

Для того, чтобы получить компоненту $z^{(\beta,\gamma)}(t)$, необходимо совершить цепочку обратных вейвлет-преобразований коэффициентов $c_j^{(\beta,\gamma)}$. Последний шаг в этой цепочке обратных преобразований совершается от некоторого набора коэффициентов

$w_j^{(\beta,\gamma)}$, $j=1,\dots,n_\beta$, которые занимают в аналоге вектора $C_z^{(N)}$ те же позиции, что и обычные коэффициенты $c_j^{(\beta)}$ разложения сигнала $z(t)$. Однако обратное преобразование от них дает компоненту $z^{(\beta,\gamma)}(t)$, а не $z^{(\beta)}(t)$. Назовем коэффициенты $w_j^{(\beta,\gamma)}$ модифицированными вейвлет-пакетными коэффициентами сигнала $z(t)$. Таким образом, модифицированные коэффициенты $w_j^{(\beta,\gamma)}$ являются обычными вейвлет-коэффициентами на уровне детальности β для случая, когда на вход прямого преобразования подается не исходный сигнал, а лишь его компонента $z^{(\beta,\gamma)}(t)$. Ящики Гейзенберга для коэффициентов $w_j^{(\beta,\gamma)}$ имеют ту же временную длину, что и для $c_j^{(\beta)}$, но их частотная длина равна частотной длине коэффициентов $c_j^{(\beta,\gamma)}$. Таким образом, переход от обычных вейвлет-пакетных коэффициентов $c_j^{(\beta,\gamma)}$ к модифицированным $w_j^{(\beta,\gamma)}$ является приемом, позволяющим сузить временной интервал неопределенности (уменьшить временную длину ящика Гейзенберга). Заметим, что при таком переходе энергия коэффициентов разложения сохраняется:

$$\sum_{j=1}^{n_\beta} (w_j^{(\beta,\gamma)})^2 = \sum_{j=1}^{n_\beta/q} (c_j^{(\beta,\gamma)})^2.$$

Если на плоскости «время-частота» построить 2-мерную карту, состоящую из частотно-упорядоченных ящиков Гейзенберга модифицированных коэффициентов $w_j^{(\beta,\gamma)}$ и закрасить каждый ящик в соответствии с палитрой, пропорциональной абсолютным значениям вейвлет-пакетных коэффициентов $w_j^{(\beta,\gamma)}$ (или их логарифмам), то получится диаграмма, визуализирующая временную динамику основных временных масштабов (или периодов) нестационарного сигнала. Внешне эта мозаика из вейвлет-пакетных ящиков Гейзенберга может проигрывать в эстетическом восприятии по сравнению, например, с традиционными спектрально-временными диаграммами. Однако она дает более точное и адекватное представление о частотно-временной динамике сильно нестационарного сигнала, состоящего из множества короткоживущих всплесков различного масштаба, форма которых может сильно отличаться от гармонического колебания той или иной частоты.

ПЗ. Оптимальный выбор вейвлета и пороговая вейвлет-фильтрация.

Одним из важных вопросов, который необходимо решать при применении ортогональных вейвлет-разложений, является выбор наилучшего базиса, например, порядка вейвлета Добеши. При выборе оптимального вейвлет-базиса наиболее часто используется критерий минимума энтропии распределения квадратов модулей вейвлет-коэффициентов:

$$E(x) = -\sum_{\beta=1}^m \sum_{j=1}^{2^{(m-\beta)}} p_j^{(\beta)} \cdot \ln(p_j^{(\beta)}) \rightarrow \min, \quad p_j^{(\beta)} = |c_j^{(\beta)}|^2 / \sum_{\alpha,i} |c_i^{(\alpha)}|^2 \quad (27)$$

Метод (27) подбирает для сигнала $z(t)$ такой базис, в котором распределение значений квадратов его вейвлет-коэффициентов максимально отличаются от равномерного. Тем самым максимум информации сосредотачивается в минимальном количестве коэффициентов разложения. Часто простое применение критерия (27) дает вполне удовлетворительные результаты. Однако ниже был использован также более изощренный метод подбора оптимального базиса, который имеет вид итерационной процедуры, многократно использующей критерий (27). Это связано с желанием выделить, путем применения того или иного базиса, как можно более тонкие различия в структуре сигналов. Метод был предложен

в работе [Berger, Coifman, Goldberg, 1994] для решения задачи очищения старых вокальных записей оперных классиков от характерных шумов, (шипение, трески, щелчки) и был назван методом последовательного когерентного отсека (coherent basis thresholding). Кратко изложим метод в виде последовательности операций.

1. Инициализация: в рабочий буфер $y(t)$ помещаем исходный сигнал $z(t)$.
2. Определяем порядок вейвлета из критерия (27) для сигнала $y(t)$: $E(y) \rightarrow \min$.
3. Отсортируем вейвлет-коэффициенты $c_j^{(\beta)}$ сигнала $y(t)$ для базиса, определенного в пункте 2, в порядке убывания их абсолютных величин и отсортированные коэффициенты обозначим через d_j , $j = 0, 1, \dots, (N-1)$. Таким образом, в отсортированной последовательности коэффициент d_0 является максимальным по модулю.
4. Определим минимальное целое число $M = 0, 1, \dots, (N-1)$ из условия выполнения неравенства:

$$\frac{|d_M|^2}{\sum_{j=M+1}^{N-1} |d_j|^2} \leq \frac{2 \cdot \ln(N-M)}{(N-M)} \quad (28)$$

5. Если условие (28) выполняется сразу, для значения $M = 0$, то считать, что оптимальный порядок найден, и выйти из алгоритма.
6. Если ни для какого $M = 0, 1, \dots, (N-1)$ условие (28) не выполняется, то положить значение оптимального порядка вейвлета найденному в пункте 2 из условия минимума энтропии сразу после инициализации и выйти из алгоритма.
6. Обнулить все коэффициенты $c_j^{(\beta)}$, для которых $|c_j^{(\beta)}| \geq |d_M|$, совершить обратное вейвлет-преобразование с оставшимися коэффициентами, получившийся остаточный сигнал поместить в рабочий буфер $y(t)$ и перейти к пункту 2.

Смысл этой процедуры состоит в следующем. Считается, что сигнал состоит из «полезного сигнала», вариации которого отражены в значениях вейвлет-коэффициентов, достаточно больших по модулю и из «шума», которому соответствуют все прочие коэффициенты. Задача состоит в выборе порога значений модулей коэффициентов, выше которого они отвечают «полезному сигналу», а ниже – «шуму». Неравенство (28) как раз и призвано определять такой порог. Это условия взято из формулы для вероятности асимптотических максимальных отклонений значений гауссовского белого шума $W(t)$ (например, [Королюк и др., 1985]):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\left\{ \max_{0 \leq t \leq (N-1)} |W(t)|^2 \leq \frac{2 \ln N}{N} \right\} = 1 \quad (29)$$

где $\Pr\{\dots\}$ – вероятность события. Кроме того, в дальнейшем нам будет полезна еще одна формула, непосредственно вытекающая из (29):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\left\{ \max_{0 \leq t \leq (N-1)} |W(t)| \leq \sigma \sqrt{2 \cdot \ln N} \right\} = 1 \quad (30)$$

где σ – значение стандартного отклонения гауссовского белого шума $W(t)$.

Таким образом, смысл условия (28) состоит в разделении вейвлет-коэффициентов на «шумовые» и «полезные». Шумообразующими считаются те достаточно малые по модулю

(нижний предел суммирования в (28) равен $M+1$) коэффициенты, максимальные абсолютные значения которых лежат в асимптотических пределах для белого шума (формула (29)). Но такое выделение «шума» из сигнала зависит от используемого базиса (то, что для одного базиса является «шумом», для другого может не удовлетворять критерию (28)). Поэтому, выбрав базис из условия минимума энтропии (пункт 2), далее выделяется «шум» по отношению к выбранному базису (пункт 7) и уже для этого остаточного (обедненного информацией) сигнала опять ищется оптимальный базис (пункт 2) и так далее, до тех пор, пока остаточный сигнал не будет являться шумом даже по отношению к своему оптимальному базису (пункт 5). Последний определенный оптимальный базис считается оптимальным, поскольку он смог хоть что-то определить в самом обедненном остаточном сигнале. В этом есть смысл, поскольку из начального сигнала $z(t)$ можно извлечь информацию с помощью любого базиса, тогда как для обедненного остаточного сигнала надо поискать наилучший.

После определения для данного сигнала оптимального вейвлет-базиса может быть найдена та часть минимальных по модулю вейвлет-коэффициентов, которая может быть отброшена при обратном вейвлет-преобразовании, поскольку она отвечает шуму. Для этого делается предположение, что шум в основном сосредоточен в вариациях на первом, самом высокочастотном уровне детальности, за исключением небольшого числа точек, в котором сконцентрированы высокочастотные особенности поведения полезного сигнала и которым, следовательно, соответствуют большие значения вейвлет-коэффициентов 1-го уровня. В силу ортогональности вейвлет-преобразования дисперсия вейвлет-коэффициентов равна дисперсии исходного сигнала. Поэтому оценим стандартное отклонение шума σ для вейвлет-коэффициентов на 1-м уровне детальности. При этом следует учесть, что оценка должна быть робастной, нечувствительной к возможным большим выбросам «полезных» значений вейвлет-коэффициентов на 1-м уровне. Например, можно использовать робастную медианную оценку стандартного отклонения для нормальной случайной величины [Huber, 1981]:

$$\sigma = \text{med}\{|c_j^{(1)}|, j = 1, \dots, N/2\} / 0.6745 \quad (31)$$

Теперь, зная оценку σ из (31), можно оценить, согласно (30), порог тех значений модуля вейвлет-коэффициентов, ниже которого их можно обнулить, поскольку они являются носителями шумовых вариаций – он равен $\sigma\sqrt{2 \cdot \ln N}$. Отсюда очевидно определяется уровень σ Донохо-Джонстона для сжатия сигнала: отношение числа коэффициентов, для которых выполнено условие $|c_j^{(\beta)}| \leq \sigma\sqrt{2 \cdot \ln N}$, к общему их числу N . Эта безразмерная величина α , $0 < \alpha < 1$, может быть использована в дальнейшем как интегральная характеристика сигнала, например, для решения задач классификации. Именно эта безразмерная величина α , $0 < \alpha < 1$, предлагается по умолчанию в качестве порога нелинейной вейвлет-фильтрации: обнуляется часть α всех вейвлет-коэффициентов, наименьших по абсолютной величине.

Более распространенным применением порога Донохо-Джонстона является операция нелинейной пороговой фильтрации (thresholding) сигнала, которая заключается в выполнении следующей последовательности операций:

- 1) для выбранного ортогонального вейвлет-базиса совершить прямое дискретное вейвлет-преобразование;
- 2) отсортировать вейвлет-коэффициенты, не различая уровней детальности, в порядке возрастания их абсолютных величин;

3) положить равными нулю заданную часть α коэффициентов, минимальных по модулю (таким образом, отличными от нуля остаются лишь доля $1-\alpha$ коэффициентов, имеющих наибольшие абсолютные значения);

4) совершить обратное дискретное вейвлет-преобразование.

Результатом будет некоторый сигнал $z_T(t)$, который сохранит лишь наиболее значимые вариации исходного сигнала $z(t)$, отобранные не по частотному принципу, а согласно критерию наибольших значений вейвлет-коэффициентов.

Пусть $z(t) = f(t) + W(t)$, где $f(t)$ - «полезный» сигнал, представляющий собой кусочно-полиномиальную функцию, а $W(t)$ - гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 . Таким образом, интервал отсчетов $t = 1, \dots, N$, на которых задан $f(t)$, разбит на конечное число (не зависящее от N) непересекающихся сегментов, на каждом из которых полезный сигнал равен полиному той или иной степени, а на граничных точках сегментов сам сигнал или его производные могут претерпевать разрывы. Пусть m - максимальная степень полиномов, а K - общее число точек разрыва $f(t)$. Пусть $z_T(t)$ - сигнал, полученный из $z(t)$ операцией нелинейной пороговой фильтрации с использованием порога Донохо-Джонстона и ортогонального вейвлета, обнуляющего $(m+1)$ моментов (условие (16b)). Тогда справедлива оценка [Donoho, Johnstone, 1994; Mallat, 1998]:

$$\frac{M\{\|z_T - f\|^2\}}{\|f\|^2} \leq \frac{(K+1)(m+1)}{\rho^2} \cdot \frac{C \ln^2(N)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (32)$$

где $M\{\dots\}$ - знак математического ожидания, $\|f\|^2 = \sum_{t=1}^N f^2(t)$, $C \approx 4/\ln(2)$ - некоторая константа, $\rho^2 = \|f\|^2 / \sigma^2$ - отношение «сигнал/шум».

П4. Непрерывные вейвлет-даграммы Морле.

Пусть $\psi(t)$ - некоторая быстро-убывающая функция, удовлетворяющая условию допустимости: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ и условию нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$. Непрерывным вейвлет-преобразованием сигнала $x(s)$ называется величина, зависящая от двух параметров (t, a) , $a > 0$:

$$Wx(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \cdot \psi\left(\frac{s-t}{a}\right) ds = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+av) \cdot \psi(v) dv \quad (33)$$

Здесь t - момент времени, $a > 0$ - параметр масштаба, который далее часто будем называть более привычным термином «период». Величина (33) отражает поведение исследуемого сигнала в окрестности точки t с характерным масштабом вариаций a . Для сигнала с дискретным временем вычисление величин (33) может быть эффективно реализовано с помощью быстрого преобразования Фурье. Нашей непосредственной целью является построение 2-мерной карты значений модуля величины (33): $|Wx(t, a)|$, которая дает наглядное представление о динамике возникновения, эволюции и исчезновения «характерных периодов» короткоживущих всплесков исследуемого сигнала. Естественно,

что величина (33) сильно зависит от выбора функции $\psi(t)$. Выбор той или иной функции $\psi(t)$ определяется тем, какого вида короткоживущие сигналы мы хотим изучать.

Следует подчеркнуть, что для конечной выборки и для данного масштаба a на концах временного интервала существуют «мертвые» отрезки времени, такие, что для моментов времени t , принадлежащих этим отрезкам, «не хватает» данных либо слева, либо справа от точки t для вычисления (33). При использовании быстрого преобразования Фурье сигнал рассматривается на кольце и поэтому, если он содержит сильный низкочастотный тренд, то для моментов времени t , близких к началу и к концу выборки, возникают сильные всплески значений $|Wx(t, a)|$, которые могут сильно маскировать «полезные» вариации величин (33) внутри интервала. Поэтому перед вычислением непрерывного вейвлет-преобразования рекомендуется избавляться от низкочастотных трендов и, кроме того, при интерпретации непрерывных вейвлет-диаграмм вводить поправки на то, что значения $|Wx(t, a)|$ для моментов времени t , близких к началу и концу интервала задания сигнала, на самом деле не отражают истинных свойств сигнала. Для данного масштаба a длина «мертвых» отрезков времени, примыкающих к концам выборки обычно пропорциональна масштабу. Для вейвлетов, скорость затухания которых задается множителем в виде гауссовской функции, эту длину можно положить равной $3a$.

Одной из наиболее популярных функций $\psi(t)$ является т.н. вейвлет Морле (Morlet) или комплекснозначный «модулированный гауссиан»:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp(-t^2/2 - i\pi t) \quad (34)$$

Этот вейвлет наилучшим образом приспособлен для выделения короткоживущих гармонических всплесков (цугов) и обладает определенными свойствами оптимальности в поиске компромисса между частотным и временным разрешением (выходит на т.н. гейзенберговский предел).

Нашей непосредственной целью является построение 2-мерной карты значений логарифма квадрата модуля величины (33): $\ln(|Wx(t, a)|^2)$, которая дает наглядное представление о динамике возникновения, эволюции и исчезновения «характерных периодов» гармонических всплесков исследуемого сигнала. Кроме того, полезной статистикой является непрерывный вейвлет-спектр мощности:

$$P(a) = \langle |Wx(t, a)|^2 \rangle_t \quad (35)$$

где $\langle \dots \rangle_t$ означает усреднение по времени. Величина (35) дает представление о распределении средней энергии всплесков в зависимости от их временного масштаба.

П5. Спектральный и спектрально-временной анализ.

Для оценки спектра мощности скалярного временного ряда в дальнейшем будет использоваться параметрическая авторегрессионная оценка [Marple(Jr), 1987]. Пусть $x(t)$ – стационарный в широком смысле временной ряд. Модель авторегрессии порядка $p \geq 0$ (AR(p)-модель) представляет собой уравнение:

$$x(t) + \sum_{k=1}^p a_k x(t-k) = \varepsilon(t) + d \quad (36)$$

где a_k – коэффициенты авторегрессии (параметры модели), d – параметр статического смещения, $\varepsilon(t)$ – белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Введем $(p+1)$ -мерные векторы:

$$Y(t) = (-x(t-1), \dots, -x(t-p), 1)^T, \quad c = (a_1, \dots, a_p, d)^T \quad (37)$$

и запишем (36) в компактной форме:

$$x(t) = c^T Y(t) + \varepsilon(t) \quad (38)$$

Пусть имеется конечная выборка $\{x(t), t=1, \dots, N\}$. Тогда оценка вектора параметров c из условия минимума суммы квадратов остатков $\sum_{t=p+1}^N \varepsilon^2(t) \rightarrow \min$ сводится к решению системы нормальных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей A :

$$Ac = R, \quad A = \sum_{t=p+1}^N Y(t)Y^T(t), \quad R = \sum_{t=p+1}^N x(t)Y(t) \quad (39)$$

Решение уравнений (39) автоматически удовлетворяет условию устойчивости AR(p)-модели: все корни полинома $\lambda^p + \sum_{k=1}^p a_k \lambda^{p-k}$ по модулю строго меньше 1 [Marple(Jr), 1987].

Однако при больших порядках p решение системы (39) становится достаточно трудоемким, особенно если его надо решать многократно. Поэтому обычно предполагают стационарность выборки, от параметра d освобождаются тем, что вычитают из значений выборочную оценку среднего, а элементы a_{ij} матрицы A размером теперь уже $p \times p$ заменяют на значения $\gamma_{|i-j|}$, где γ_k – выборочные оценки ковариационной последовательности $M\{x(t)x(t+k)\}$, $M\{\dots\}$ – знак математического ожидания. В этом случае матрица A становится теплицевой (симметричной неотрицательно определенной и по всем диагоналям стоят одинаковые элементы), для обращения которой существует быстрый итерационный метод Дарбина-Левинсона [Marple(Jr), 1987], при котором порядок авторегрессии последовательно увеличивается от 1-го до искомого на единицу. Полученная таким образом оценка параметров AR(p)-модели известна как оценка Юла-Уолкера. Однако эта оценка довольно часто теряет устойчивость при выполнении итераций Дарбина-Левинсона, особенно если теплицева матрица A имеет диагонали, на которых стоят значения, близкие к значениям на главной диагонали матрицы (при наличии сильных монохроматических компонент в сигнале). В 1969 году Бургом была предложена модификация метода Юла-Уолкера, состоящая по-прежнему в использовании итераций Дарбина-Левинсона в последовательном увеличении порядка авторегрессии. Однако на этот раз при каждом увеличении порядка $p-1 \rightarrow p$ эти итерации используются лишь для изменения «старых» коэффициентов $a_j, j=1, \dots, (p-1)$, а каждый «новый» коэффициент a_p (старший коэффициент модели AR(p), известный также как «коэффициент отражения»), находится из условия минимума суммы квадратов ошибок прогноза на шаг вперед и назад в силу AR(p)-модели. Одновременно для каждого текущего порядка модели авторегрессии, увеличивающегося от 1 до p , находится оценка дисперсии σ^2 . Этот метод, который

подробно изложен в [Marple(Jr), 1987], оказался исключительно эффективным и устойчивым – именно он и будет использоваться в дальнейшем для идентификации параметров AR(p)-моделей.

После определения значений параметров модели (36) они могут быть использованы для построения параметрической оценки спектра мощности временного ряда:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\omega k}|^2} \quad (40)$$

которая следует из представления Крамера [Brillinger, 1975] для стационарной случайной последовательности, $0 < \omega < \pi$ – частота.

Первичным параметром модели (36) является порядок авторегрессии p . Несмотря на многочисленные попытки дать формальный критерий определения оптимального порядка p , эта задача так и нашла окончательного решения, а предлагаемые методы не выходят за рамки эмпирических правил. Порядок AR-модели меняется для одних и тех же данных в зависимости от целей использования [Kashyap, Rao, 1976]. Для прогноза на один или несколько шагов вперед порядок обычно небольшой и редко достигает 10. Если же целью является получение параметрической спектральной оценки (40), то порядок p имеет смысл брать значительным: $p = N/10 \div N/4$. При этом надо иметь в виду, что чем больше порядок, тем чувствительнее оценка, но, одновременно, тем она более неустойчива и содержит больше статистических флуктуаций.

Пусть число отсчетов N временного ряда достаточно велико и его спектральные свойства медленно меняются со временем. Тогда можно рассмотреть задачу оценки эволюции спектра мощности в скользящем временном окне некоторой длины $L < N$ со взаимным смещением ΔL значений. Пусть τ – временная координата правого конца текущего временного окна. Оценим для отсчетов $\tau - L + 1 \leq t \leq \tau$ модель AR(p) и вычислим оценку спектра мощности (40). В этом случае ее можно записать в виде, подчеркивающим зависимость от положения и длины окна: $S_{xx} = S_{xx}(\omega, \tau | L)$. С учетом разрешения по частоте $\Delta\omega = 2\pi/L$ на выборке длиной L отсчетов, формулу (40) имеет смысл применять для значений частот $\omega_j = 2\pi j/L$, $j = 1, \dots, (L-1)/2$.

Построение двумерных карт или рельефов $S_{xx}(\omega, \tau | L)$ на плоскости «частота- время» (ω, τ) в русскоязычной литературе традиционно имеет аббревиатуру СВАН (спектрально-временной анализ). Обычно для этой цели используется дискретное преобразование Фурье от выборки в текущем временном окне, вычисление периодограммы и ее усреднение по частотам тем или иным способом для уменьшения дисперсии оценки. Опыт показывает, что использование AR-модели дает более устойчивые результаты. Кроме того, при использовании оценки (40) отсутствуют побочные эффекты, связанные с цикличностью дискретного преобразования Фурье от конечной выборки [Press et al., 1996].

П6. Длинные цепи максимумов модулей непрерывных вейвлет-преобразований.

Пусть $x(t)$ – анализируемый сигнал. Масштабно-зависимое сглаживание сигнала с помощью некоторого ядра усреднения дается формулой [Hardle, 1989]:

:

$$\bar{x}(t, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + av) \cdot \psi_0(v) dv \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(v) dv \quad (41)$$

где $a > 0$ – масштаб, а $\psi_0(t)$ является некоторой быстро-затухающей функцией. В дальнейшем мы будем использовать гауссовское ядро: $\psi_0(t) = \exp(-t^2)$. Определим ядро непрерывного вейвлет-преобразования:

$$\psi_n(t) = (-1)^n \cdot \frac{d^n \psi_0(t)}{dt^n} \equiv (-1)^n \cdot \psi_0^{(n)}(t) \quad (42)$$

Используя формулу интегрирования по частям и свойство быстрого затухания функции $\psi_0(t)$, нетрудно получить следующую формулу для производной заданного порядка n от сглаженной функции (41), деленной на $n!$ (коэффициент Тейлора):

$$c_n(t, a) \equiv \frac{1}{n!} \frac{d^n \bar{x}(t, a)}{dt^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + av) \cdot \psi_n(v) dv \Big/ a^n \int_{-\infty}^{+\infty} v^n \cdot \psi_n(v) dv \quad (43)$$

Заметим, что формула (41) является частным случаем формулы (43) для $n = 0$.

Точка максимума модуля вейвлет-преобразования (WTMM-точка) (t, a) для $n \geq 1$ определяется как точка локального максимума величин $|c_n(t, a)|$ по отношению к изменениям времени t для заданного масштаба a . Что же касается $n = 0$, то для этого случая определим WTMM-точки как просто точки локальных экстремумов (как минимумов, так и максимумов) сглаженного сигнала $c_0(t, a)$. WTMM-точки могут быть объединены в цепи, а множество всех цепей из таких точек образуют скелет непрерывного вейвлет-преобразования сигнала. Если $\psi_0(t)$ является гауссовским ядром усреднения, то цепи скелета вейвлет-преобразований являются непрерывными при стремлении масштаба $a \rightarrow 0$ [Mallat, 1989]. WTMM-точки для первой производной $c_1(t, a)$ выделяют моменты времени максимальных масштабно-зависимых трендов (как положительных, так и отрицательных) сглаженного сигнала $c_0(t, a)$ для заданного значения масштаба a .

Пусть сигнал $x(t)$ задан на интервале времени $t \in [0, T]$. Если момент времени t близок к началу или концу интервала $[0, T]$, то сглаживающее преобразование (43) испытывает отсутствие информации о поведении сигнала $x(t)$ для $t < 0$ или для $t > T$. Обычно это затруднение преодолевается путем рассмотрения сигнала на кольце, вычисляя значения сигнала вне интервала $[0, T]$ по правилу: если $t < 0$, то $x(t) = x(T + t)$ и если $t > T$, то $x(t) = x(t - T)$. Это продолжение сигнала дает возможность вычислять преобразование (43) для всех моментов времени $t \in [0, T]$ и является полезным с точки зрения использования быстрого преобразования Фурье для вычислений (43). Тем не менее, значения (43) являются искаженными на концах интервала $[0, T]$ и более корректным подходом является введение некоторых масштабно-зависимых «мертвых интервалов», примыкающих к началу и к концу отрезка времени $[0, T]$, таких, что значения вейвлет-преобразований (43) исключаются из анализа для моментов времени, принадлежащих «мертвым интервалам». Для гауссовского ядра усреднения $\psi_n(t) \approx 0$ при $|t| \geq 3$. Следовательно, можно ввести следующее правило:

$$\begin{aligned} & \text{если } 0 \leq t \leq 3a \text{ или } T - 3a \leq t \leq T \\ & \text{то } c_n(t, a) \text{ исключаются из анализа} \end{aligned} \quad (44)$$

Из правила (44) следует, что максимально возможное значение масштаба a_{\max} , пригодное для анализа, определяется условием: $a_{\max} = T/6$, причем для этого значения преобразование (43) может быть вычислено лишь в единственной точке $t = T/2$. Правые концы «мертвых интервалов», примыкающих к точке $t = 0$, а также левые концы этих интервалов, примыкающих к $t = T$, образуют куполообразную область допустимых к рассмотрению точек (t, a) на 2-мерной плоскости значений $(t, \lg(a))$.

Для временных рядов с шагом по времени Δt минимальным масштабом, допустимым к рассмотрению, будем считать период Найквиста $a_{\min} = 2\Delta t$. Введем критерий того, какая цепь скелета непрерывного вейвлет-преобразования считается длинной – если значения масштаба вдоль этой цепи, начинающейся при $a = a_{\min}$, превосходят пороговое значения масштаба $a_* = \gamma a_{\max} = \gamma(T/6)$, где $a_{\min}/a_{\max} \equiv \gamma_{\min} \leq \gamma < 1$ – параметр метода. Чем ближе величина параметра γ к 1, тем меньше число «длинных» цепей. Для $\gamma = \gamma_{\min}$ все цепи формально являются «длинными».

Длинные цепи локальных экстремумов (минимумов и максимумов) значений $c_0(t, a) = \bar{x}(t, a)$ и максимумов абсолютных значений 1-ой производной $c_1(t, a)$ представляют особый интерес для выделения главных характеристик поведения сигнала, поскольку они дают своеобразный «отпечаток пальца» временного ряда. Рассматривая цепи максимумов модуля первой производной $|c_1(t, a)|$ мы будем различать их по знаку, то есть, выделять отдельно цепи максимальных масштабно-зависимых негативных ($c_1(t, a) < 0$) и позитивных ($c_1(t, a) > 0$) трендов. Кроме того, интерес будут представлять длинные цепи максимальных по модулю значений второй производной $c_2(t, a)$, также различаемые по знаку.

П7. Оценка мультifrактального спектра сингулярности методом анализа флуктуаций после устранения масштабно-зависимых трендов.

В настоящее время существуют 2 подхода для оценки спектров сингулярности временного ряда. Первый метод появился раньше и основан на анализе цепей точек максимума модулей непрерывных вейвлет-преобразований с вейвлетами, обычно равными производной той или иной степени от функции плотности распределения Гаусса [Mallat, 1998]. Второй подход более близок к технике Херста и основан на анализе зависимости стандартного отклонения или размаха выборки от ее длины. В последнее время был разработан и активно применяется в различных приложениях метод анализа флуктуаций после исключения масштабно-зависимых трендов – Detrended Fluctuation Analysis (DFA) [Kantelhardt et al., 2002]. Сравнительный опыт применения методов показывает, что метод DFA является более надежным и устойчивым. Ниже будет использован только DFA и кратко приведены основные конструкции метода.

Пусть $x(t)$ – случайный процесс. Определим в качестве меры $\mu_x(t, \delta)$ поведения сигнала $x(t)$ на интервале $[t, t + \delta]$ модуль его приращения: $\mu_x(t, \delta) = |x(t + \delta) - x(t)|$ и вычислим среднее значение модуля таких мер в степени q :

$$M(\delta, q) = M\{(\mu_x(t, \delta))^q\} \quad (45)$$

Случайный процесс называется масштабно-инвариантным, если $M(\delta, q) \sim |\delta|^{\rho(q)}$ при $\delta \rightarrow 0$, то есть существует предел:

$$\rho(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M(\delta, q)}{\ln |\delta|} \quad (46)$$

Заметим, что в определении (45-46) величина меры $\mu_x(t, \delta)$ может быть взята также как размах, что ближе к традиционным конструкциям Херста:

$$\mu_x(t, \delta) = \max_{t \leq u \leq t+\delta} x(u) - \min_{t \leq u \leq t+\delta} x(u) \quad (47)$$

Если зависимость $\rho(q)$ является линейной: $\rho(q) = Hq$, где $H = \text{const}$, $0 < H < 1$, то процесс называется монофрактальным. В частности, для классического броуновского движения $H = 0.5$. Возведение в степень q подчеркивает различные типы поведения сигнала: если $q > 0$, то в значение меры (45) основной вклад вносят интервалы времени с большими отклонениями от тренда, а если $q < 0$, то интервалы времени с малыми вариациями.

Для вычисления функции $\rho(q)$ по конечной выборке из временного ряда $x(t)$, $t = 1, \dots, N$ можно применить метод DFA. Пусть s - число отсчетов, ассоциированное с варьируемым масштабом δ_s : $\delta_s = s\Delta t$. Разобьем выборку на непересекающиеся малые интервалы длиной s отсчетов:

$$I_k^{(s)} = \{t : 1 + (k-1)s \leq t \leq ks, \quad k = 1, \dots, [N/s]\} \quad (48)$$

и пусть

$$y_k^{(s)}(t) = x((k-1)s + t), \quad t = 1, \dots, s \quad (49)$$

участок временного ряда $x(t)$, соответствующий интервалу $I_k^{(s)}$. Пусть $p_k^{(s,m)}(t)$ - полином порядка m , подогнанный методом наименьших квадратов к сигналу $y_k^{(s)}(t)$. Рассмотрим отклонения от локального тренда:

$$\Delta y_k^{(s,m)}(t) = y_k^{(s)}(t) - p_k^{(s,m)}(t), \quad t = 1, \dots, s \quad (50)$$

и вычислим значение:

$$Z^{(m)}(q, s) = \left(\sum_{k=1}^{[N/s]} (\max_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t) - \min_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t))^q / [N/s] \right)^{1/q} \quad (51a)$$

которое будем рассматривать как оценку для $(M(\delta_s, q))^{1/q}$. Возможно также использование стандартного отклонения в качестве меры вариативности сигнала:

$$Z^{(m)}(q, s) = \left(\sum_{k=1}^{[N/s]} \left(\frac{1}{s} \sum_{t=1}^s (\Delta y_k^{(s,m)}(t))^2 \right)^{q/2} / [N/s] \right)^{1/q} \quad (51b)$$

Процедура устранения тренда на каждом малом участке длиной s отсчетов необходима в случае наличия в сигнале трендов внешнего происхождения (сезонных, приливных и т.п.). Определим теперь функцию $h(q)$ как коэффициент линейной регрессии между значениями $\ln(Z^{(m)}(q, s))$ и $\ln(s)$: $Z^{(m)}(q, s) \sim s^{h(q)}$. Очевидно, что $\rho(q) = qh(q)$, а для монофрактального процесса $h(q) = H = \text{const}$.

Следующим шагом в мультифрактальном анализе [Feder, 1988] после определения функции $\rho(q)$ является вычисление спектра сингулярности $F(\alpha)$, который является с фрактальной размерности множества точек, в окрестности которых показатель Гельдера-Липшица для случайных реализаций процесса $x(t)$ равен α , то есть таких точек t , для которых $|x(t + \delta) - x(t)| \sim |\delta|^\alpha$, $\delta \rightarrow 0$. Стандартный подход состоит в вычислении статистической суммы Гиббса:

$$W(q, s) = \sum_{k=1}^{[N/s]} (\max_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t) - \min_{1 \leq t \leq s} \Delta y_k^{(s,m)}(t))^q \quad (52)$$

и определения показателя массы $\tau(q)$ из условия $W(q, s) \sim s^{\tau(q)}$, после чего спектр $F(\alpha)$ вычисляется согласно формуле:

$$F(\alpha) = \max_q \{ \min(\alpha q - \tau(q)), 0 \} \quad (53)$$

Сравнивая (51) и (52), нетрудно заметить, что $\tau(q) = \rho(q) - 1 = qh(q) - 1$. Таким образом, $F(\alpha) = \max_q \{ \min(q(\alpha - h(q)) + 1, 0) \}$.

Для монофрактального процесса, когда $h(q) = H = \text{const}$, получаем, что $F(H) = 1$ и $F(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \neq H$. В частности, положение и ширина носителя спектра $F(\alpha)$, то есть значения $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$, $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ и α^* - то значение, которое доставляет функции $F(\alpha)$ максимум: $F(\alpha^*) = \max_{\alpha} F(\alpha)$, являются характеристиками шума. Величину α^* можно назвать обобщенным показателем Херста. Для монофрактального сигнала значение $\Delta\alpha$ должно быть равно нулю, а $\alpha^* = H$. Что же касается значения $F(\alpha^*)$, то оно равно фрактальной размерности точек, для окрестности которых выполняется масштабирующее соотношение $M(\delta, q) \sim |\delta|^{\rho(q)}$.

Литература.

- Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. (1985) Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., Наука, 640с.
- Любушин А.А., Писаренко В.Ф., Ружич В.В., Буддо В.Ю. (1998) Выделение периодичностей в сейсмическом режиме. Вулканология и сейсмология. 1998, № 1, С. 62-76.
- Любушин А.А. (2000) Вейвлет-агрегированный сигнал и синхронные всплески в задачах геофизического мониторинга и прогноза землетрясений. – Физика Земли. N3. С.20-30.
- Любушин А.А. (2001) Многомерный вейвлет-анализ временных рядов систем геофизического мониторинга. - Физика Земли. 2001, N6. С.41-51.
- Любушин А.А. (2002(а)) Робастный вейвлет-агрегированный сигнал для задач геофизического мониторинга - Физика Земли. 2002, N9. С.37-48.
- Любушин А.А. (2002(б)) Периодичности и ритмы глобальной сейсмичности в XX веке – Совместное заседание сессии научного семинара ОГГГН РАН «Теоретические проблемы геологии» и X научного семинара «Система Планета Земля» по теме: «Ритмичность и цикличность в геологии как отражение общих законов развития», 07-08.02.2002. Тезисы докладов семинара ОГГГН РАН, М., 2002, с.66-67.
- Любушин А.А., З.Калаб, Н.Часова (2004) Использование вейвлет-анализа для автоматической классификации трехкомпонентных сейсмических записей. - Физика Земли, 2004, N7, с.50-56.
- Любушин А.А., Копылова Г.Н. (2004) Многомерный вейвлет-анализ временных рядов электротеллурических наблюдений на Камчатке - Физика Земли, 2004, N2, с.82-96.
- Любушин А.А., Соболев Г.А. (2006) Мультифрактальные меры синхронизации микросейсмических колебаний в минутном диапазоне периодов – Физика Земли, 2006, N9, с.18-28.
- Любушин А.А. (2007) «Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга». М.: Наука, 2007, 228с.
- Соболев Г.А. (2003) Эволюция периодических колебаний сейсмической интенсивности перед сильными землетрясениями. Физика Земли, 2003, № 11, 3-15.
- Соболев Г.А. (2004) Вариации микросейсм перед сильным землетрясением. Физика Земли, 2004, № 6, 3-13.
- Соболев Г.А., Любушин А.А., Закржевская Н.А. (2005) Синхронизация микросейсмических колебаний в минутном диапазоне периодов – Физика Земли, 2005, N8, с.3-27.
- Berger J., R. Coifman, and M., Goldberg (1994) Removing noise from music using local trigonometric bases and wavelet packets. J. Audio Eng. Soci., Vol. 42, No. 10, pp. 808-818.
- Brillinger D.R. (1975) Time series. Data analysis and theory. Holt, Rinehart and Winston, Inc., N.Y., Chicago, San Francisco (Русский перевод: Бриллинджер Д. (1980) Временные ряды. Обработка данных и теория. М., Мир. 536с.)
- Chui, C.K. (1992) An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego, CA (Русский перевод: Чуи Ч. Введение в вэйвлеты. М., Мир, 2001, 412с.).
- Cox D.R., Lewis P.A.W. (1966) The statistical analysis of series of events. London, Methuen (Русский перевод: Кокс Д. П.Льюис (1969) Статистический анализ последовательностей событий. М., Мир. 312с.)
- Daubechies I. (1992) Ten Lectures on Wavelets. No.61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia (Русский перевод: Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 464с.).
- Donoho D., I. Johnstone (1994) Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, vol. 81, pp. 425-455.
- Feder J. (1988) Fractals. Plenum Press, New York, London (Русский перевод: Федер Е. (1991) Фракталы. М., Мир. 254с.)

- Hardle W.* (1989) Applied nonparametric regression. Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochell, Melbourne, Sydney (Русский перевод: Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. М., Мир, 1993, 349с.)
- Huber P.J.* (1981) Robust statistics. John Wiley and Sons. New York, Chichester, Brisbane, Toronto (Русский перевод: Хьюбер П. (1984) Робастность в статистике. М., Мир, 303с.).
- Kashyap R.L., A.R.Rao.* (1976) Dynamic stochastic models from empirical data. Academic Press. N.Y., San Francisco, London (Русский перевод: *Каश्यан Р.Л., А.Р.Рao.* (1983) Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М., Наука, 384с.)
- Mallat S.* (1998) A wavelet tour of signal processing. Academic Press. San Diego, London, Boston, N.Y., Sydney, Tokyo, Toronto. 577 p. (Русский перевод: Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. - М.: Мир, 2005, 671с.).
- Marple S.L.(Jr.)* (1987) Digital spectral analysis with applications. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (Русский перевод: *Марпл(мл) С.Л.* (1990) Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., Мир. 584с.)
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T.* (1996) Numerical Recipes, 2-nd edition, Chapter 13, Wavelet Transforms, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Rao C.R.* (1965) Linear statistical inference and its applications. John Wiley & Sons, Inc. N.Y., London, Sydney (Русский перевод: *Pao C.P.* (1968) Линейные статистические методы и их применение. М., Наука. 548 с.).