

УДК 550.334

ЭНТРОПИЙНАЯ МЕРА СКАЧКООБРАЗНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ GPS

© 2016 г. А. А. Любушин¹, П. В. Яковлев²

¹Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, г. Москва

E-mail: lyubushin@yandex.ru

²Российский государственный геологоразведочный университет им. С. Орджоникидзе, г. Москва

E-mail: payulyakovleb@dmail.com

Поступила в редакцию 02.02.2015 г.

Предлагается новый метод оценки скачкообразной составляющей временных рядов, с использованием понятия псевдо-производной. Положительным качеством предлагаемого подхода является его простота реализации по сравнению с более традиционными методами выделения особенностей временных рядов на фоне помех. Необходимость автоматического выделения скачков зашумленного сигнала и введения количественной меры “скачкообразности” сигнала возникает в задачах анализа временных рядов GPS. Интерес к скачкам среднего уровня временных рядов GPS связан с тем, что они могут быть проявлением как обычных, так и так называемых “тихих” землетрясений. Предлагаются критерии, основанные на вычислении энтропии вспомогательного ряда усредненных кусочно-ступенчатых аппроксимаций, построенного с использованием псевдо-производных, для оценки “степени скачкообразности” зашумленного временного ряда. Приведены примеры анализа реальных временных рядов GPS.

DOI: 10.7868/S0002333715060046

ВВЕДЕНИЕ

В анализе временных рядов часто встречается необходимость выделения таких особенностей поведения как выбросы, изменение поведения тренда (“излом тренда”), скачкообразное изменение среднего значения (“ступенька”). Выделение таких особенностей может преследовать разные цели. Чаще всего они рассматриваются как проявление некоторых дефектов систем регистрации или результат воздействия внешних факторов, не имеющих отношения к природе изучаемых данных. Иными словами, эти особенности временных рядов идентифицируются для того, чтоб от них избавиться и перейти к рассмотрению “очищенных” данных. Другая задача является антиподом первой: именно эти особенности можно рассматривать как проявление некоторых важных изменений в природе данных, как своего рода “события”, меняющие поведение временных рядов. Далее в статье акцент будет сделан на выделении скачков среднего уровня (“ступенек”) и введении некоторой меры, которая описывает “степень скачкообразности” временного ряда. Это связано с тем, что разработанный метод ориентирован прежде всего на анализа временных рядов GPS, для которых часть скачков обусловлена пост-сейсмическими эффектами в результате землетрясений и, кроме того, предположительно скрытыми событиями, такими как “тихие” землетрясения [Dragert et al., 2001; Eberhart-Philips et al., 2003; Ito et al., 2006; Linde et al., 1996].

В настоящее время существует достаточно богатый арсенал алгоритмов для решения задачи выделения характерных элементов поведения временных рядов. В работах [Гвишиани и др., 2010; Соловьев и др., 2012] для морфоструктурного анализа сигналов применяется аппарат нечеткой логики. Методы для определения статистически значимых скачкообразных изменений среднего значения во временных рядах GPS представлены в работах [Peffetti, 2006; Riley, 2008; Borghi et al., 2012; Gazeaux, et al., 2013; Goudarzi et al., 2013; Bruni et al., 2014]. Задача выделения резких изменений среднего уровня является также актуальной в анализе климатических временных рядов [Zurbenko et al., 1996; Ducle-Robitaille et al., 2003; Rodionov, Overland, 2005; Rodionov, 2006].

Метод, рассматриваемый в данной статье, является исключительно простым по своей реализации и фактически использует лишь два параметра — минимальное и максимальное значения баз для вычисления псевдо-производной при усреднении кусочно-ступенчатых аппроксимаций, что на наш взгляд, делает его вполне конкурентно-способным в сравнении с методами, разработанными ранее для аналогичных целей. Эту работу можно рассматривать как продолжение статьи [Lyubushin, Yakovlev, 2014] в направлении дальнейшего развития методов анализа нерегулярной “шумовой” составляющей временных рядов GPS.

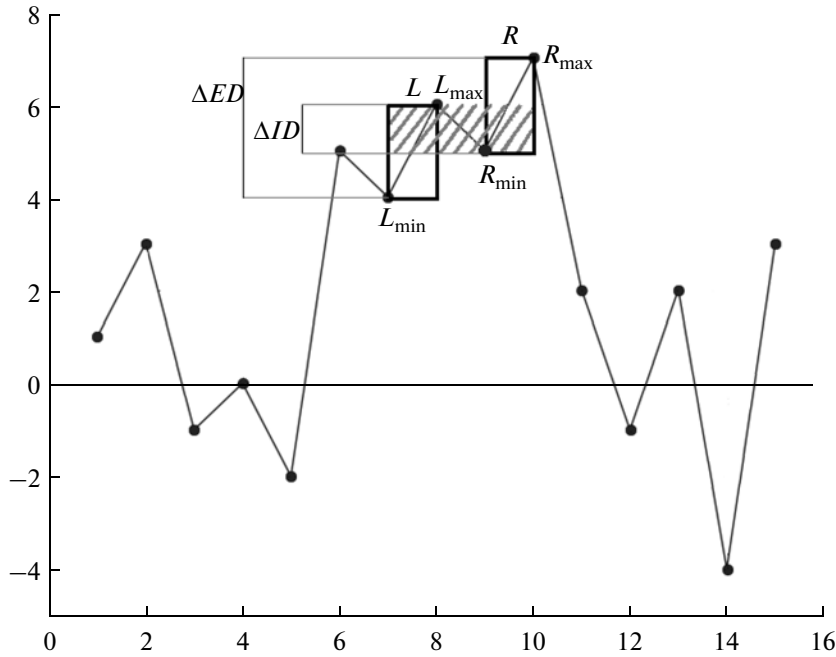


Рис. 1. Явное и скрытое приращения, $M = 4$. Пояснения в тексте.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПСЕВДО-ПРОИЗВОДНОЙ

Понятие псевдо-производной для выделения скачков временных рядов было предложено П.В. Яковлевым. Анализ временных рядов будет проводиться в скользящем окне, которое в свою очередь разбито на два равных подокна L и R – левое и правое соответственно. Результатом анализа должна являться функция, отражающая степень изменчивости исходных данных.

Пусть $X(t)$ – временной ряд, где $t = 1, \dots, N$, а M – длина скользящего окна. Тогда подокна L и R будут длиной $[M/2]$ и $M - [M/2]$ отсчетов соответственно. Таким образом, мы можем собрать некоторую описательную статистику ряда $X(t)$, оперируя следующими величинами

$$L_{\max}^i = \max_{i \leq t < i + [M/2]} X(t), \quad L_{\min}^i = \min_{i \leq t < i + [M/2]} X(t), \quad (1)$$

$$R_{\max}^i = \max_{i + [M/2] \leq t < i + M} X(t), \quad R_{\min}^i = \min_{i + [M/2] \leq t < i + M} X(t), \quad (2)$$

где $i = 1, \dots, N - M$.

Введем две величины:

$$\Delta ED_i = R_{\max}^i - L_{\min}^i, \quad \Delta ID_i = R_{\min}^i - L_{\max}^i, \quad (3)$$

и назовем их *явным* и *скрытым приращениями* соответственно, тогда *полным приращением* будет являться их сумма (см. рис. 1).

Псевдо-производной на базе M назовем величину

$$D_i = \frac{\Delta ED_i + \Delta ID_i}{2}, \quad (4)$$

которая и будет являться характеристикой изменчивости сигнала. Коэффициент $\frac{1}{2}$ введен, чтобы не учитывать событие дважды.

СХОДСТВА ПСЕВДО-ПРОИЗВОДНОЙ С ПРОИЗВОДНОЙ

Название “псевдо-производная” для величины (4) выбрано по следующим причинам. Рассмотрим три возможных случая. Так как представленные ниже выкладки справедливы для каждого окна, индекс i в них отсутствует:

1. Пусть $D > 0$. Тогда $(R_{\max} - L_{\min})/2 > (L_{\max} - R_{\min})/2$ откуда следует $(R_{\max} + R_{\min})/2 > (L_{\max} + L_{\min})/2$, то есть середина окна R расположена выше середины окна L , что указывает на рост значений сигнала.

2. Пусть $D < 0$. Тогда $(R_{\max} - L_{\min})/2 < (L_{\max} - R_{\min})/2$, откуда следует $(R_{\max} + R_{\min})/2 < (L_{\max} + L_{\min})/2$, то есть середина окна L расположена выше середины окна R , что указывает на спад значений сигнала. Этот случай полностью зеркален предыдущему, за счет того что скрытое и явное приращения меняются местами.

3. Пусть $D = 0$. Тогда $(R_{\max} - L_{\min})/2 = (L_{\max} - R_{\min})/2$ или $(R_{\max} + R_{\min})/2 = (L_{\min} + L_{\max})/2$, то есть середины окон L и R совпадают.

Таким образом, для определения направления возрастающей или убывающей тенденции сигнала нужно смотреть на взаимное расположение середин соседних окон, верхняя и нижняя границы которых соответствуют максимальному и минимальному значениям сигнала в окне соответственно. По знаку величины (4), так же как и по знаку обычной производной, можно судить, возрастают или убывают значения сигнала. Таким же образом можно находить точки экстремума сигнала. Очевидно, что само значение D_i аппроксимирует величину приращения сигнала в том направлении, в котором он меняется. Напомним, что $i = 1, \dots, N - M$, то есть каждое рассчитанное значение сопоставляется началу окна R , и все значения смещаются по оси абсцисс на $\left[\frac{M}{2}\right]$.

В частном случае, когда длина M скользящего окна равна 2 и шаг дискретизации сигнала равен 1, значения D_i полностью совпадают со значениями конечных разностей, используемых для аппроксимации производной, так как $R_{\max}^i = R_{\min}^i = R$ и $L_{\max}^i = L_{\min}^i = L$, вследствие чего

$$D_i = \frac{\Delta ED_i + \Delta ID_i}{2} = \frac{R_{\max}^i - L_{\min}^i + R_{\min}^i - L_{\max}^i}{2} = \frac{2R - 2L}{2} = R - L = X(i+1) - X(i).$$

ПОСТРОЕНИЕ КУСОЧНО-СТУПЕНЧАТОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Кусочно-ступенчатая аппроксимация (КСА) — это инструмент, используемый при анализе временных рядов для обнаружения резких изменений среднего уровня на фоне шума.

Алгоритм построения кусочно-ступенчатой аппроксимации с использованием псевдо-производных состоит из следующих этапов:

1. Рассчитать псевдо-производную исходного сигнала.

2. Удалить из псевдо-производной скользящее среднее в окне, имеющим радиус, равный базе псевдо-производной.

3. Найти нули получившегося временного ряда и построить “ступеньки” в интервалах между ними, где каждая ступенька — это медианное значение исходного сигнала в интервалах между нулями псевдо-производной.

Рассмотрим подробнее пункты 1–3. Основной целью данного алгоритма является поиск нулей псевдо-производной, потому что они, как и нули производной, указывают на точки экстремума сигнала, то есть на точки, в которых функция ме-

няет свой характер: убывает или возрастает. В случае, когда сигнал содержит тренд и колебания сигнала относительно него малы, то псевдо-производная может вовсе не пересекать ось абсцисс, поэтому требуется процесс неявного удаления тенденций путем вычитания скользящего среднего из значений псевдо-производной.

Удалив скользящее среднее и найдя нули получившегося сигнала, мы можем в качестве “ступенек” взять медианное значения сигнала в промежутках между нулями. Поскольку мы рассматриваем дискретное время, то под “нулями” сигнала следует понимать середины двух соседних отсчетов, которые имеют разные знаки. Таким образом, мы получим КСА исходного сигнала. Отметим, что псевдо-производная содержит на M отсчетов меньше, чем в исходном сигнале, поэтому положим первые $\left[\frac{M}{2}\right]$ отсчетов равными первому значению псевдо-производной, а последние $M - \left[\frac{M}{2}\right]$ отсчетов равными последнему значению.

Обозначим через $S_M(t)$ построенную таким образом КСА временного ряда, где $t = 1, \dots, N$ — целочисленный временной индекс, N — длина временного ряда в числе отсчетов.

Размер окна M будет влиять на количество аппроксимирующих “ступеней”. Чем меньше M , тем более детальной является КСА сигнала. В то же время интерес представляют далеко не все скачки КСА, а лишь те из них, которые соответствуют наибольшей амплитуде скачка. Однако следует учесть, что на величины скачков КСА при заданной базе вычисления псевдо-производной влияет также шум, то есть часть высокоамплитудных скачков КСА обусловлена влиянием шума. По этой причине, для подавления влияния шума, далее используется усреднение большого числа КСА, построенных для множества значений базы M , поскольку в точке, где имеется разрыв сигнала, КСА будет иметь разрыв для большинства значений M .

Для этой цели введем два параметра M_{\min} и M_{\max} — минимального и максимального значений базы M для вычисления псевдо-производной. Вычислим сигнал $\bar{S}(t)$ равный среднему от всех КСА:

$$\bar{S}(t) = \sum_{M=M_{\min}}^{M=M_{\max}} S_M(t) / (M_{\max} - M_{\min} + 1). \quad (5)$$

Обозначим через $R(t)$ абсолютное приращение усредненной КСА во временном окне радиуса $M_{\min}/2$ с центральной точкой t :

$$R(t) = \max_{l-M_{\min}/2 \leq q \leq l+M_{\min}/2} \bar{S}(q) - \min_{l-M_{\min}/2 \leq q \leq l+M_{\min}/2} \bar{S}(q). \quad (6)$$

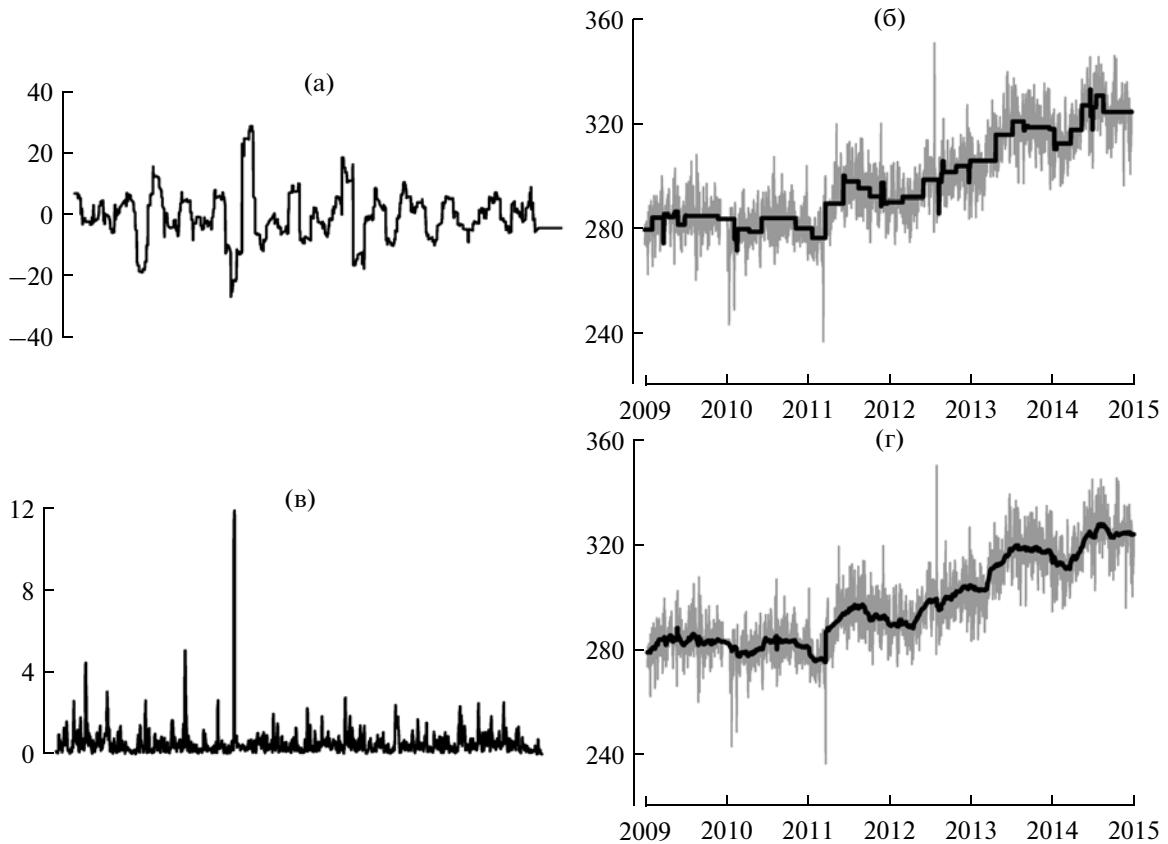


Рис. 2. (а) – Псевдо-производная ежесуточного временного ряда вертикальных смещений на станции J568, вычисленная на базе 100 значений; (б) – исходный GPS-сигнал представлен серой линией, а КСА для базы $M = 100$ представлена жирной черной линией; (в) – график статистики $R(t)$ из формулы (6); (г) – исходный GPS-сигнал представлен серой линией, а усредненная КСА из формулы (5) представлена жирной черной линией. $En = 0.8373$.

Из смысла значений $R(t)$ следует, что их максимумы приходятся на скачки временного ряда. Отметим, что величины (6) определены для $M_{\min}/2 + 1 \leq t \leq N - M_{\min}/2$.

Поставим цель сформулировать количественный критерий наличия в зашумленном временном ряду значимой скачкообразной составляющей. В дальнейшем мы будем всюду использовать следующие значения параметров метода: $M_{\min} = 5$, $M_{\max} = 200$. Вариации вспомогательного временного ряда (6) несут в себе информацию о наличии в исходном временном ряду значимых скачков среднего уровня.

Для выделения значимых скачков рассмотрим величины:

$$R^+(t) = \max(0, R(t) - 3R_{\text{med}}), \quad (7)$$

где R_{med} – медиана величин (6), то есть величины (7) представляют собой превышения уровня трех медианных значений. Далее введем нормализованную энтропию этих превышений:

$$En = -\sum_i^{(+)} p(t) \lg(p(t)) / \lg N^+, \quad (8)$$

где символ $\sum_i^{(+)}$ означает суммирование лишь по тем временным индексам t , для которых $R^+(t) > 0$, N^+ – общее число таких индексов, $p(t) = R^+(t) / \sum_q^{(+)} R^+(q)$ – величины (7), преобразованные к значениям вероятностей. По построению величина (8) удовлетворяет ограничению $0 \leq En \leq 1$ и чем ближе ее значение к 1, тем более хаотичными являются вариации величин (7). Временной ряд, не имеющий значимых скачков, характеризуется хаотичным изменением величин (7) и, как следствием этого, значения нормализованной энтропии для него выше, чем для ряда, содержащего скачки.

ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ

В дальнейшем предлагаемая методика будет иллюстрирована на примере анализа ежесуточных временных рядов вертикальных смещений на различных станциях GPS (система IGS) которые могут быть свободно скачаны по адресу:

http://gf9.ucs.indiana.edu/daily_rdahmmexec/daily/.

На рис. 2а, 2б приведены графики псевдо-производной ежесуточного временного ряда вертикаль-

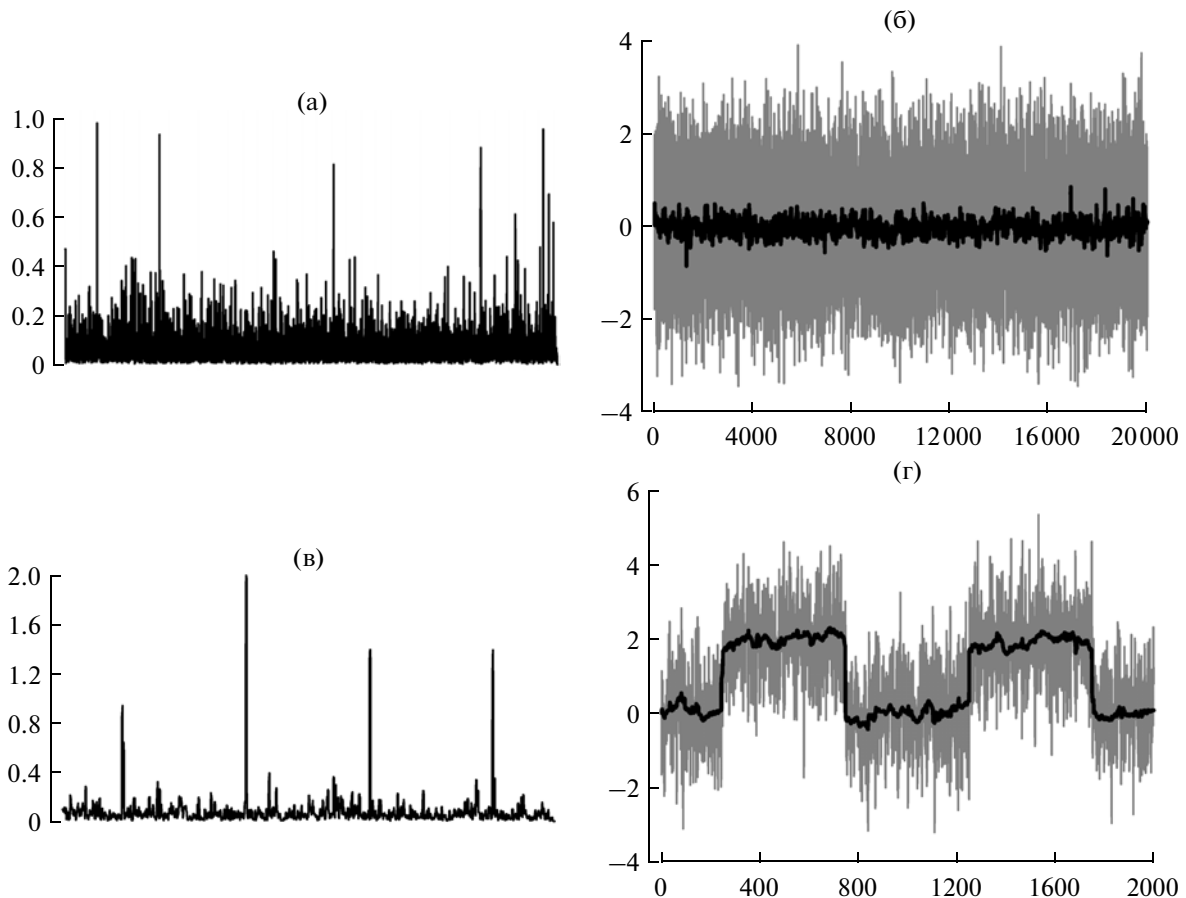


Рис. 3. (а) – График величины $R(t)$, формула (6), для реализации гауссовского белого шума; (б) – серой линией представлен исходный временной ряд, толстой черной линией – его усредненная КСА, $En = 0.9046$; (в) – график величины $R(t)$ для искусственного сигнала с 4-мя скачками среднего уровня; (г) – серой линией представлен исходный временной ряд, толстой черной линией – его усредненная КСА, $En = 0.7860$.

ных смещений на станции J568 (37.32° С.Ш., 139.02° В.Д.) и его КСА для базы $M = 100$. На рис. 2в представлен график статистики (б), который содержит значительный максимум, приходящийся на скачок среднего уровня усредненной КСА на рис. 2г. Этот пример иллюстрирует эффект подавления влияния шума при усреднении КСА для разных баз в формуле (5), поскольку это усреднение убрало множество скачков на КСА на рис. 2б и оставило лишь один скачок, который присутствует во всех КСА, вычисленных для разных баз. Для этого примера $En = 0.8922$.

В качестве следующего примера сравним результаты анализа 2-х искусственных сигналов: реализацию гауссовского белого шума с единичной дисперсией длиной 20000 отсчетов (где заведомо нет скачков уровня) и зашумленного временного ряда, куда введена скачкообразная составляющая. Этот второй сигнал представляет собой сумму $T(t) + \varepsilon(t)$, $t = 1, \dots, 2000$, где $\varepsilon(t)$ – гауссовский белый шум с единичной дисперсией, а $T(t)$ – кусочно-ступенчатая функция, равная 0 при $t \in [1, 250]$, $[751, 1250]$, $[1751, 2000]$ и равная 2 при $t \in [251, 750]$,

[1251, 1750]. Результаты анализа этих 2-х сигналов представлены на рис. 3. Из сравнения значений в подрисуночных подписях видно, что значение нормализованной энтропии En как меры хаотичности величин $R(t)$ упало со значения 0.9046 до 0.7860. Кроме того, из рис. 3в очевидно вытекает решающее правило для определения моментов времени скачков – это точки существенных максимумов статистики (б).

На рис. 4 представлены результаты анализа 2-х временных рядов длительностью 18 лет для станций ALBH (48.39° С.Ш., 123.49° З.Д.) и DELF (4.38° С.Ш., 51.99° В.Д.). Эта пара временных рядов была выбрана как имеющих большую нормализованную энтропию и, вследствие этого, с большой вероятностью не содержащих скачков среднего уровня. Рис. 4б, 4г подтверждают это заключение. Рис. 5 отражает результаты анализа временных рядов для станций FARV (37.70° С.Ш., 123.00° З.Д.) и METS (24.40° С.Ш., 60.22° В.Д.), которые содержат явные скачки. Вследствие этого значения нормализованной энтропии для них меньше, чем для рядов на рис. 4.

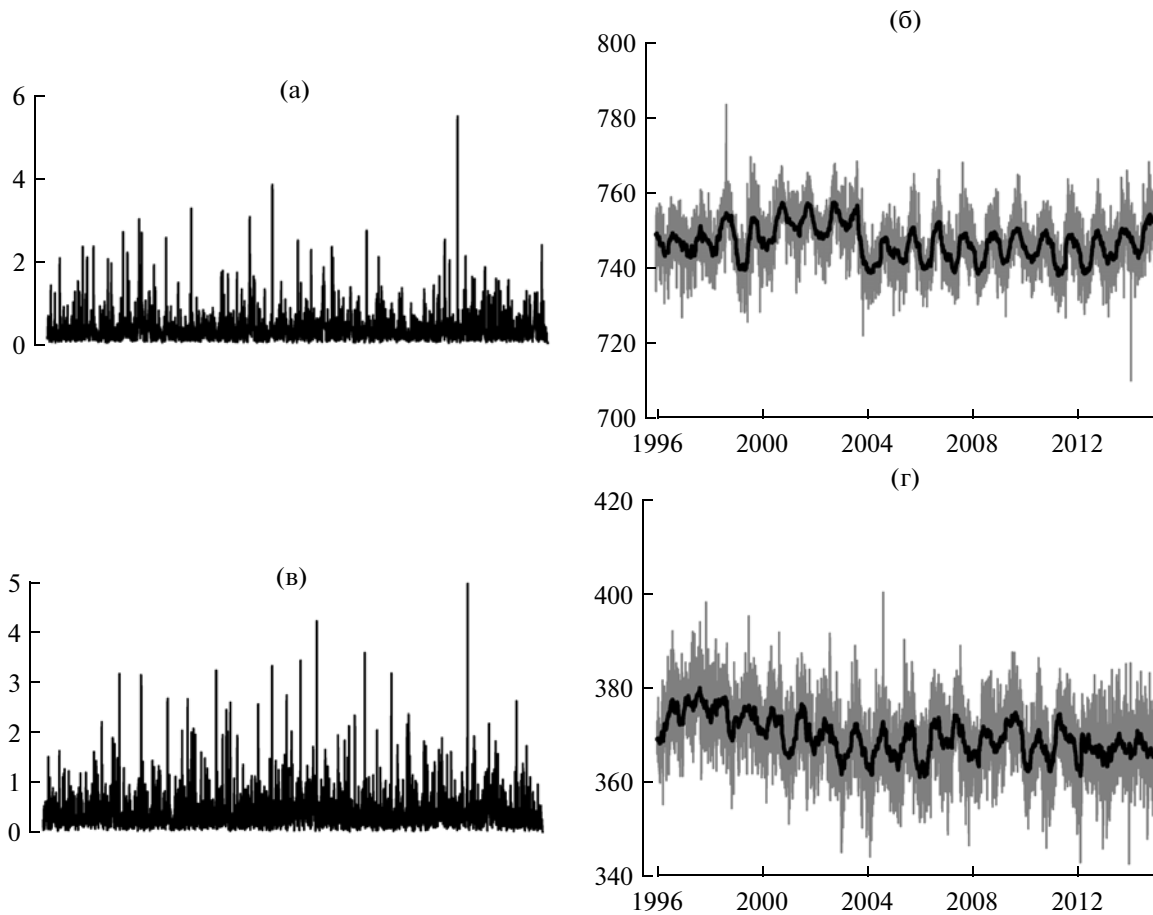


Рис. 4. (а) – График величины $R(t)$ для ежесуточного временного ряда вертикальных смещений на станции ALBH; (б) – серой линией представлен исходный временной ряд для станции ALBH, толстой черной линией – его усредненная КСА, $En = 0.9163$; (в) – график величины $R(t)$ для ежесуточного временного ряда вертикальных смещений на станции DELF; (г) – серой линией представлен исходный временной ряд для станции DELF, толстой черной линией – его усредненная КСА, $En = 0.9090$.

Таким образом, энтропийная мера (7) позволяет построить автоматизированный метод оценки того, имеются ли во временных рядах скачкообразная составляющая. Наличие такого алгоритма очень важно для анализа базы данных временных рядов GPS, поскольку, например, используемая в статье база данных в настоящее время содержит информацию о 3-компонентных ежесуточных временных рядах с 10590 стационарных GPS станций, расположенных по всему миру.

Возникает идея определить пороговое значение нормализованной энтропии En^* , которое формально разделяет временные ряды со скачкообразной компонентой ($En < En^*$) от рядов без скачков ($En \geq En^*$). Очевидно, что такая граница должна быть “размытой”, то есть существует некий диапазон значений энтропии, для которых существование малоамплитудных скачков на фоне шума является трудно определяемым. Из визуального анализа множества из 40 временных рядов эту размытую границу можно формализовать так: при

$En > 0.90$ ряды не содержат скачков, а при $En < 0.88$ скачки присутствуют, то есть $En^* \approx 0.89$. На рис. 6 представлена гистограмма нормализованной энтропии, которая дает возможность представить диапазон возможных значений En .

Во временных рядах GPS часто встречаются скачки малой амплитуды, которая сравнима с амплитудой шумовых вариаций – именно их наличие приводит к невозможности установления четкой границы En^* . Поэтому следующей идеей является прямое использование величины En как своеобразной меры нестационарности поведения временного ряда, основанной на оценке скачкообразной компоненты сигнала.

Результаты реализации этой идеи представлены на рис. 7 и рис. 8. На рис. 7а представлены положения 2176 станций GPS на западе США, для которых доступны ежесуточные временные ряды. Ниже исследовалась лишь вертикальная компонента. Рассматривались временные окна длиной 730 суток с взаимным смещением 7 суток. При

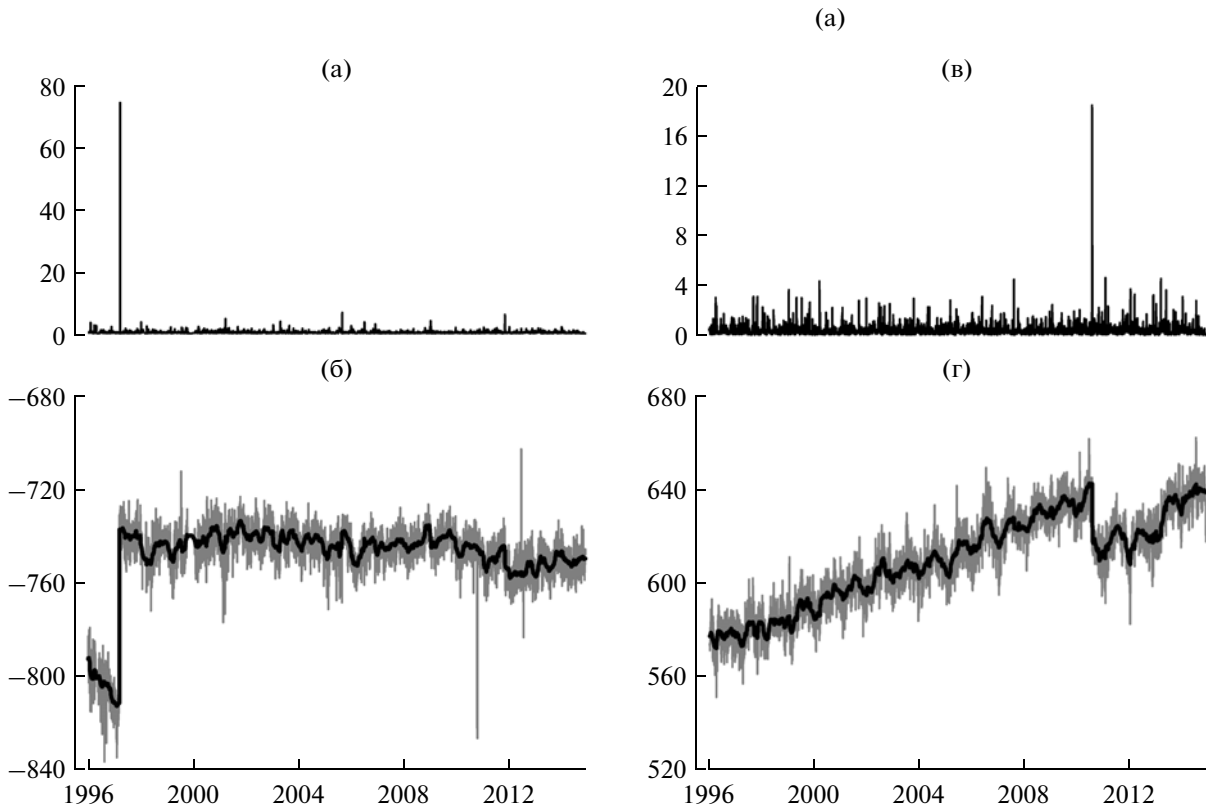


Рис. 5. (а) — График величины $R(t)$ для ежесуточного временного ряда вертикальных смещений на станции FARB; (б) — серой линией представлен исходный временной ряд для станции FARB, толстой черной линией — его усредненная КСА, $En = 0.7090$; (в) — график величины $R(t)$ для ежесуточного временного ряда вертикальных смещений на станции METS; (г) — серой линией представлен исходный временной ряд для станции METS, толстой черной линией — его усредненная КСА, $En = 0.8788$.

этом на каждой станции рассматривались лишь такие окна, для которых число пропущенных значений не превышало 30, пропущенные значения восполнялись константами, определенными как половины средних значений ряда слева и справа от пропущенного интервала на фрагментах той же длины, что и длина пропуска. Это условие выделяло для каждого окна работоспособные станции. На рис. 7б приведен график зависимости таких работоспособных станций в зависимости от положения временной метки правого конца окна. Для каждого временного окна и для каждой станции, которые были работоспособными в данном окне, вычислялась нормализованная энтропия En по формуле (8).

Прямоугольная область на рис. 7а покрывалась регулярной сеткой узлов размером 50×50 . В каждом временном окне для каждого узла этой сетки находились 10 ближайших к узлу работоспособных станций и каждому узлу приписывалось значение медианы, вычисленной от значений En в этих ближайших 10 станциях. Совокупность значений En в каждом узле регулярной сетки позволяет построить “индивидуальную”

карту распределения En по пространству, соответствующую каждому временному окну. Усредняя такие “индивидуальные” карты, можно получить среднюю карту, соответствующую положению временных окон между заданными датами.

На рис. 7в представлен график изменения среднего значения En , вычисленного по всем узлам каждой “индивидуальной” карты в зависимости от временной метки правого конца временного окна. Ниже мы выбрали границы для усреднения “индивидуальных” карт 2009–2014 гг. Такой выбор связан с целью максимально освободить результат усреднения от влияния числа работоспособных станций, так как это число после 2009 г. превышает 1000 (рис. 7б, временная метка окна начиная с 2011 г.). Кроме того, на рис. 7в видно, что среднее значение по узлам сетки для этого временного интервала значительно стабилизировалось.

На рис. 8 представлена усредненная за промежуток времени 2009–2014 гг. карта значений En . На ней заметна линейная область “повышенной скачкообразности”, то есть пониженных значений En , параллельная побережью Тихого океана. На рис. 8 представлено минимальное покрываю-

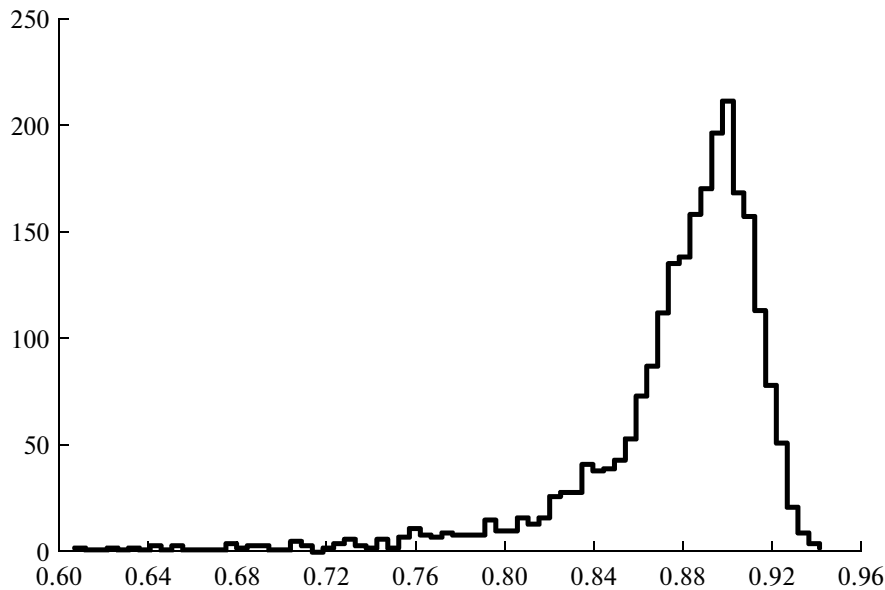


Рис. 6. Гистограмма значений нормализованной энтропии $E_n = 2457$ ежесуточных временных рядов вертикальных смещений GPS с длительностью не менее 2000 сут.

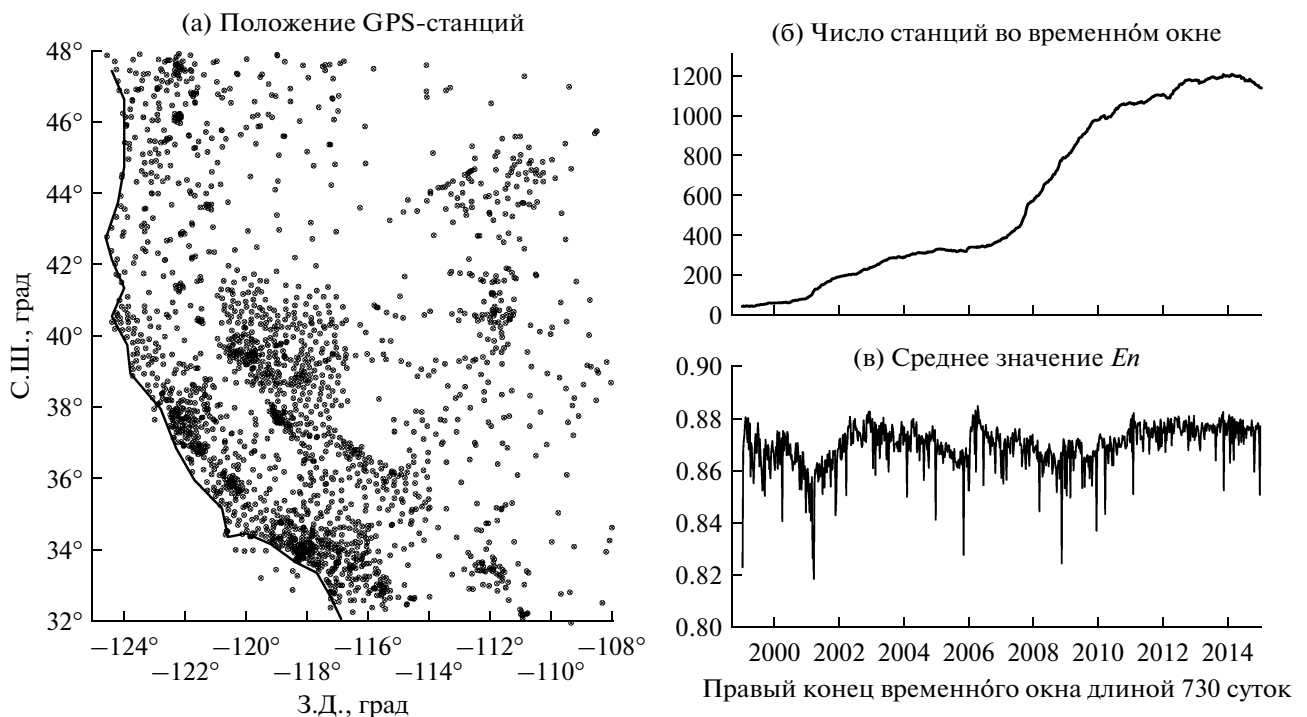


Рис. 7. (а) – Положения 2176 станций GPS на Западе США; (б) – число работоспособных станций во временном окне длиной 730 суток (число пропусков не превышает 30); (в) – средняя нормализованная энтропия E_n , полученная усреднением значений в каждом узле в текущем временном окне.

шее дерево [Duda, Hart, 1973] для положений эпицентров землетрясений с магнитудой $M \geq 4.5$ для интервала времени 1973–2014 гг., из которого заметно, что эта область пониженных значений E_n не совпадает полностью с местами повышен-

ной сейсмичности. Отсюда можно сделать вывод, что наличие скачков во временных рядах GPS обусловлено не только постсейсмическими эффектами, но и другими процессами, такими как усиление криппа и “медленные землетрясения”.

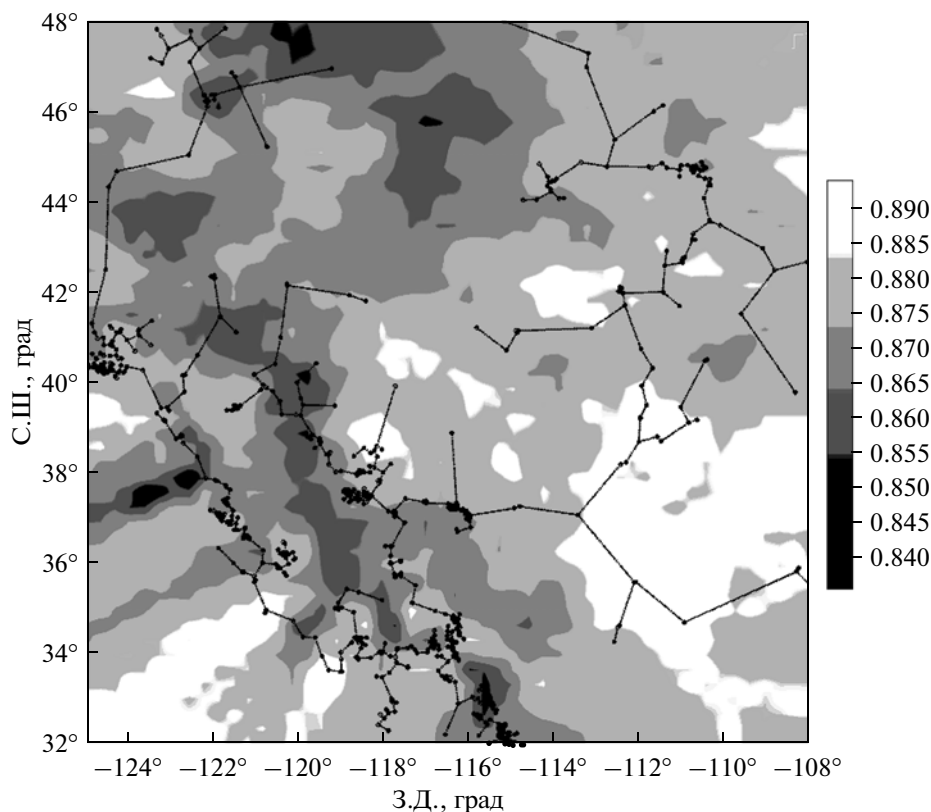


Рис. 8. Карта распределения по пространству нормализованной энтропии E_n , полученная усреднением карт от всех временных окон длиной 730 сут со смещением 7 сут, находящихся внутри интервала времени 2009–2014 гг. (временные метки окон на рис. 7б, 7в начиная с 2011 г.). Показано минимальное покрывающее дерево эпицентров землетрясений $M \geq 4.5$ 1973–2014 гг.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен новый подход в анализе сигналов, использующий такую характеристику изменчивости сигнала, как псевдо-производная, имеющую определенные сходства с классическим определением производной. Предложен критерий оценки скачкообразной составляющей временных рядов GPS, основанный на вычислении нормализованной энтропии абсолютных величин приращений усредненной кусочно-ступенчатой аппроксимации, построенной с использованием псевдо-производной. Предложен алгоритм построения пространственных карт изменчивость энтропийного критерия скачкообразности, который может быть использован для выделения областей, в которых наиболее вероятно наличие скрытых геодинамических процессов типа “тихих землетрясений”.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 15-05-00414 и Министерства образования и науки Российской Федерации (в соответствии с требованием государственного контракта № 14.577.21.0109).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Соловьев А.А.* Дискретный математический анализ и геолого-геофизические приложения // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2010. № 2. Выпуск № 16. С. 109–125.
- Соловьев А.А., Агаян С.М., Гвишиани А.Д., Богоутдинов Ш.Р., Шульга А.* Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. II. Выбросы на секундных магнитограммах // Физика Земли. 2012. № 5. С. 37–52.
- Borghi A., Cannizzaro L., Vitti A.* Advanced Techniques for Discontinuity Detection in GNSS Coordinate Time-Series. An Italian Case Study / Kenyon S. et al. (eds.). Geodesy for Planet Earth, International Association of Geodesy Symposia 136, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2012.
- Bruni S., Zerbini S., Raicich F., Errico M., Santi E.* Detecting discontinuities in GNSS coordinate time series with STARS: case study, the Bologna and Medicina GPS sites // J. Geodesy, December 2014. V. 88. № 12. P. 1203–1214.
- Dragert H., Wang K., James T.S.* A Silent Slip Event on the Deeper Cascadia Subduction Interface // Science. V. 292. P. 1525–1528.
- Ducre-Robitaille J.F., Vincent L.A., Boulet G.* Comparison of techniques for detection of discontinuities in temperature series // Int. J. Climatology. 2003. V. 23. № 9. P. 1087–1101.

- Duda R.O., Hart P.E.* Pattern classification and scene analysis, John Wiley & Sons, N.Y., London, Sydney, Toronto. 1973. (Русский перевод: Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир. 1976. 511 с.)
- Eberhart-Philips D. et al.* The 2002 Denali fault earthquake, Alaska: A large-magnitude, slip-partitioned event // *Science*. 2003. V. 300. P. 1113–1118.
- Gazeaux J. et al.* Detecting offsets in GPS time series: first results from the detection of offsets in GPS experiment // *J. Geophys. Res. Solid Earth*. 2013. V. 118. P. 2397–2407.
- Goudarzi M. A., Cocard M., Santerre R., Woldai T.* GPS interactive time series analysis software // *GPS Solutions*. 2013. V. 17(4). P. 595–603.
- Ito Y., Obara K., Shiomi K., Sekine S., Hirose H.* Slow earthquakes coincident with episodic tremors and slow slip events // *Science*. 2006. V. 26. P. 503–506.
- Linde A.T., Gladwin, M.T., Johnston M.J.S., Gwyther R.L., Bilham R.G.* A slow earthquake sequence on the San Andreas fault 1996 // *Nature*. V. 383. P. 65–68.
- Lyubushin A., Yakovlev P.* Properties of GPS noise at Japan islands before and after Tohoku mega-earthquake. *SpringerPlus*. 2014. 3:364 doi:10.1186/2193-1801-3-364, <http://www.springerplus.com/content/3/1/364>
- Perfetti N.* Detection of station coordinate discontinuities within the Italian GPS Fiducial Network // *J. Geod.* 2006. V. 80. P. 381–396.
- Riley W.J.* Algorithms for frequency jump detection // *Metrologia*. 2008. V. 45. S. 154–161.
- Rodionov S., Overland J.E.* Application of a sequential regime shift detection method to the Bering Sea ecosystem // *ICES J. Marine Science*. 2005. V. 62. P. 328–332.
- Rodionov S.N.* Use of prewhitening in climate regime shift detection // *Geophysical Research Letters*. 2006. V. 33. L12707.
- Zurbenko I., Porter P.S., Gui R., Rao S.T., Ku J.Y., Eskridge R.E.* Detecting Discontinuities in Time Series of Upper-Air Data: Development and Demonstration of an Adaptive Filter Technique // *J. Climate*. 1996. V. 9. P. 3548–3560.